

MonBac.ma

Plateforme de préparation au Baccalauréat marocain

Corrigé — Mathématiques

Sciences Mathématiques A & B

Session de Rattrapage — 2026

Coefficient : 9 | Durée : 4h | Barème : /20

Table des matières

Exercice 1

7,5 pts

Analyse — Étude de fonctions, suites et intégrales

Partie I — Étude de la fonction g et encadrement

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = \ln(t) - (t - 1)$.

Soit $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

On considère la fonction h de la variable réelle t définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} (t-1)^2 - g(t)$$

1. Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(t)$.

(0,5 pt)

La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme combinaison de fonctions dérivables sur cet intervalle ($t \mapsto (t-1)^2$ est polynomiale, $g(t) = \ln(t) - (t-1)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$).

Calculons $h'(t)$:

$$h'(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} \cdot 2(t-1) - g'(t)$$

Or $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$, donc :

$$h'(t) = \frac{2g(x)}{(x-1)^2} (t-1) - \frac{1}{t} + 1 = \frac{2g(x)}{(x-1)^2} (t-1) + \frac{t-1}{t}$$

$$h'(t) = (t-1) \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t} \right)$$

$$\forall t \in]0, +\infty[: \quad h'(t) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t} \right) (t-1)$$

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h , montrer qu'il existe un réel θ compris entre x et 1 tel que $\frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$. (0,5 pt)

Vérifions les hypothèses du théorème de Rolle pour h sur l'intervalle $[\min(x, 1), \max(x, 1)]$:

- h est continue sur $[\min(x, 1), \max(x, 1)]$ (comme composée de fonctions continues).
- h est dérivable sur $] \min(x, 1), \max(x, 1)[$.
- $h(1) = \frac{g(1)}{(1-1)^2} (1-1)^2 - g(1) = 0 - (\ln(1) - 0) = 0$.
- $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} (x-1)^2 - g(x) = g(x) - g(x) = 0$.

Donc $h(1) = h(x) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe θ strictement compris entre x et 1 tel que $h'(\theta) = 0$.

$$h'(\theta) = 0 \implies \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{\theta} \right) (\theta - 1) = 0$$

Comme θ est strictement compris entre x et 1, on a $\theta \neq 1$, donc $\theta - 1 \neq 0$. Ainsi :

$$\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{\theta} = 0 \implies \frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$$

Il existe θ strictement compris entre x et 1 tel que $\frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$.

3. Montrer que $\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}$. (0,5 pt)

θ est strictement compris entre x et 1, c'est-à-dire $\min(x, 1) < \theta < \max(x, 1)$.

Cas 1 : Si $x > 1$, alors $1 < \theta < x$.

- $|x-1| = x-1$, donc $\frac{x+1-|x-1|}{2} = \frac{x+1-(x-1)}{2} = 1$ et $\frac{x+1+|x-1|}{2} = \frac{x+1+x-1}{2} = x$.
- On obtient bien $1 < \theta < x$.

Cas 2 : Si $0 < x < 1$, alors $x < \theta < 1$.

- $|x-1| = 1-x$, donc $\frac{x+1-|x-1|}{2} = \frac{x+1-(1-x)}{2} = x$ et $\frac{x+1+|x-1|}{2} = \frac{x+1+1-x}{2} = 1$.
- On obtient bien $x < \theta < 1$.

Dans les deux cas :

$$\boxed{\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}}$$

4. En déduire que $\frac{-1}{x+1-|x-1|} < \frac{g(x)}{(x-1)^2} < \frac{-1}{|x-1|+x+1}$. (0,25 pt)

De la question 2, on a $\frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$.

De la question 3, $\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}$.

Comme $\theta > 0$, en inversant les inégalités :

$$\frac{1}{\frac{x+1+|x-1|}{2}} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\frac{x+1-|x-1|}{2}}$$

$$\frac{2}{x+1+|x-1|} < \frac{1}{\theta} < \frac{2}{x+1-|x-1|}$$

En multipliant par $\frac{-1}{2}$ (et en inversant les inégalités) :

$$\frac{-1}{x+1-|x-1|} < \frac{g(x)}{(x-1)^2} < \frac{-1}{|x-1|+x+1}$$

Partie II — Étude de la fonction f

On définit f sur $]0, +\infty[$ par : $f(1) = 1$ et $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)^2$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement. (1 pt)

Limite en 0^+ :

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $x-1 \rightarrow -1$, donc $\frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow +\infty$.

Ainsi $f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)^2 \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

Interprétation : La droite $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une **asymptote verticale** à la courbe (C) .

Limite en $+\infty$:

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$.

Donc $\frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow 0$, et $f(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétation : La droite $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une **asymptote horizontale** à la courbe (C) en $+\infty$.

1-b) Montrer que f est continue au point 1. (0,25 pt)

Il faut montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)^2 = 1^2 = 1 = f(1)$.

f est continue au point 1.

2-a) Montrer que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \left(1 + \frac{\ln(x)}{x - 1} \right) \cdot \frac{g(x)}{(x - 1)^2}$. (0,25 pt)

On a $f(x) - 1 = \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)^2 - 1 = \frac{\ln^2(x) - (x-1)^2}{(x-1)^2}$.

Factorisons : $\ln^2(x) - (x-1)^2 = (\ln(x) - (x-1))(\ln(x) + (x-1))$.

Or $g(x) = \ln(x) - (x-1)$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \frac{(\ln(x) - (x-1))(\ln(x) + (x-1))}{(x-1)^3} = \frac{g(x) \cdot (\ln(x) + x - 1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^2} \cdot \frac{\ln(x) + x - 1}{x - 1} = \frac{g(x)}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{x-1} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \left(1 + \frac{\ln(x)}{x - 1} \right) \cdot \frac{g(x)}{(x - 1)^2}}$$

2-b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1. (0,25 pt)

Quand $x \rightarrow 1 : \frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow 1$, donc $1 + \frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow 2$.

De la question 2 (Partie I), $\frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$ avec $\theta \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1$, donc $\frac{g(x)}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{-1}{2}$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$.

Cette limite existe et est finie, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -1$.

f est dérivable en 1 et $f'(1) = -1$.

2-c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1. (0,25 pt)
L'équation de la tangente au point $(1, f(1)) = (1, 1)$ avec $f'(1) = -1$ est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -1 \cdot (x - 1) + 1$$

$$\boxed{(T) : y = -x + 2}$$

3-a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et calculer $f'(x)$.

(0,75 pt)

Pour $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$, $f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)^2$.

Posons $u(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$. Alors $f(x) = u(x)^2$, donc $f'(x) = 2u(x) \cdot u'(x)$.

Calculons $u'(x)$:

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1) - \ln(x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x \ln(x)}{x(x-1)^2}$$

Or $(x-1) - x \ln(x) = -(x \ln(x) - x + 1) = -x(\ln(x) - 1 + \frac{1}{x})$.

On remarque que $g(x) = \ln(x) - (x-1)$, donc $\ln(x) = g(x) + x - 1$ et :

$$x \ln(x) - x + 1 = x(g(x) + x - 1) - x + 1 = xg(x) + x^2 - x - x + 1 = xg(x) + (x-1)^2$$

Hmm, procédons plus directement. On a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1-x \ln(x)}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Notons que $g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\ln(x) - \frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1-x \ln(x)}{x}$.

Donc $u'(x) = \frac{g(1/x)}{(x-1)^2}$.

Ainsi :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{\ln(x)}{x-1} \cdot \frac{g(1/x)}{(x-1)^2} = \frac{2 \ln(x)}{x-1} \cdot \frac{g(1/x)}{(x-1)^2}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[\setminus\{1\} : f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x-1} \cdot \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

3-b) Montrer que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: \frac{\ln(x)}{x-1} > 0$.

(0,25 pt)

Cas 1 : Si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$ et $x-1 > 0$, donc $\frac{\ln(x)}{x-1} > 0$.

Cas 2 : Si $0 < x < 1$, alors $\ln(x) < 0$ et $x-1 < 0$, donc $\frac{\ln(x)}{x-1} > 0$.

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: \frac{\ln(x)}{x-1} > 0.$$

3-c) Montrer que g est négative sur $]0, +\infty[$ puis en déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)

On a $g(t) = \ln(t) - (t - 1)$, donc $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$.

— Pour $0 < t < 1$: $g'(t) > 0$, donc g est croissante.

— Pour $t > 1$: $g'(t) < 0$, donc g est décroissante.

Ainsi g atteint son maximum en $t = 1$: $g(1) = \ln(1) - 0 = 0$.

Donc $\forall t \in]0, +\infty[: g(t) \leq 0$.

Sens de variation de f :

Pour $x \neq 1$: $g\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ (car $\frac{1}{x} > 0$).

De plus, $\frac{\ln(x)}{x-1} > 0$ (question 3-b) et $g(1/x) \leq 0$ avec $g(1/x) = 0$ seulement si $\frac{1}{x} = 1$, i.e. $x = 1$.

Donc pour $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x-1} \cdot \frac{g(1/x)}{(x-1)^2} \leq 0$.

Et $f'(x) = 0$ n'est jamais atteint sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ car $g(1/x) < 0$ pour $x \neq 1$.

f est **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que le réel 1 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, +\infty[$. (0,25 pt)

Posons $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$.

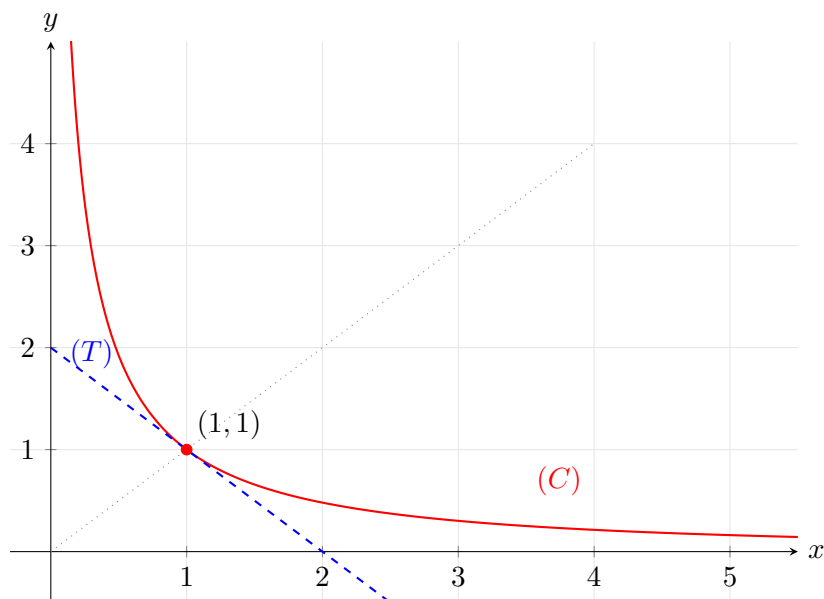
$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$ car $f'(x) \leq 0 < 1$.

En $x = 1$: $\varphi'(1) = f'(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$.

Donc φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\varphi(1) = 0$, le réel 1 est l'unique solution de $f(x) = x$.

$x = 1$ est la seule solution de $f(x) = x$ sur $]0, +\infty[$.

5. Représenter la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,75 pt)



6-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n sur $]0, 1[$.
(0,25 pt)

f est continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2 : 1 < n < +\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

Pour $n = 1 : f(1) = 1$ et f est strictement décroissante, donc sur $]0, 1[$, $f(x) > f(1) = 1$. Mais on cherche $f(x) = 1$ sur $]0, 1[$, et $f(x) > 1$ sur $]0, 1[$. En fait, par stricte décroissance et continuité avec $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, la valeur 1 n'est pas atteinte sur $]0, 1[$ ouvert.

Indication : Pour $n \geq 1$, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty > n$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \leq n$, et f est continue strictement décroissante sur $]0, 1[$, l'équation $f(x) = n$ admet bien une unique solution x_n sur $]0, 1[$ (pour $n \geq 2$ car $f > 1$ sur $]0, 1[$; pour $n = 1$, x_n existe car la borne 1 n'est pas dans l'intervalle ouvert et la limite est exactement 1 par valeurs supérieures).

Pour $n \geq 2$: on a f continue strictement décroissante sur $]0, 1[$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1^-) = 1 < n$, donc par le TVI, il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f(x_n) = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

6-b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

(0,5 pt)

On a $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $f(x_n) = n$ croît vers $+\infty$, la suite (x_n) est décroissante.

La suite (x_n) est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Si $\ell > 0$, alors $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$ (par continuité de f en $\ell \in]0, 1[$), ce qui contredit $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Donc $\ell = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

6-c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n}$.

(0,5 pt)

On a $f(x_n) = n$, c'est-à-dire $\left(\frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}\right)^2 = n$.

Comme $x_n \in]0, 1[$, on a $\ln(x_n) < 0$ et $x_n - 1 < 0$, donc $\frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} > 0$.

En prenant la racine carrée :

$$\sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}$$

Calcul de la limite :

On a $\sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} = \frac{-\ln(x_n)}{1 - x_n}$.

Quand $x_n \rightarrow 0^+$: posons $x_n = e^{-t_n}$ avec $t_n \rightarrow +\infty$.

Alors $\sqrt{n} = \frac{t_n}{1 - e^{-t_n}} \sim t_n$ quand $t_n \rightarrow +\infty$.

Et $x_n \sqrt{n} = e^{-t_n} \cdot \frac{t_n}{1 - e^{-t_n}} \sim t_n e^{-t_n} \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = 0$$

Exercice 2

2,5 pts

Analyse — Intégrales et suites

Soit φ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que sa dérivée φ' est continue sur cet intervalle.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \frac{\varphi(1)}{n+1} + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx$. (0,5 pt)

On écrit $\varphi(x) = \varphi(1) + (\varphi(x) - \varphi(1))$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \varphi(x) dx &= \int_0^1 x^n \varphi(1) dx + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \\ &= \varphi(1) \int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \\ &= \varphi(1) \cdot \frac{1}{n+1} + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \frac{\varphi(1)}{n+1} + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx}$$

2. Montrer que $\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0, 1] : |\varphi'(x)| \leq M$. (0,5 pt)

φ' est continue sur le segment $[0, 1]$ (compact). Par le théorème des bornes, φ' est bornée sur $[0, 1]$.

Donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [0, 1] : |\varphi'(x)| \leq M$.

φ' étant continue sur le compact $[0, 1]$, elle y est bornée : $\exists M \geq 0, \forall x \in [0, 1], |\varphi'(x)| \leq M$.

3. Montrer que $\forall x \in [0, 1] : |\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1 - x)$. (0,5 pt)

Par le théorème des accroissements finis (ou l'inégalité des accroissements finis), pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M \cdot |x - 1| = M(1 - x)$$

car $|\varphi'| \leq M$ sur $[0, 1]$ et $|x - 1| = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$.

Détail : On peut aussi écrire $\varphi(x) - \varphi(1) = \int_x^1 \varphi'(t) dt$ (en inversant), donc $|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq \int_x^1 |\varphi'(t)| dt \leq M(1 - x)$.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1] : |\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1 - x)}$$

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1)$.

(0,5 pt)

De la question 1 :

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \frac{n \varphi(1)}{n+1} + n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx$$

On a $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, donc $\frac{n \varphi(1)}{n+1} \rightarrow \varphi(1)$.

Majorons le reste : $\left| n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \right| \leq n \int_0^1 x^n \cdot M(1-x) dx$.

Or $\int_0^1 x^n (1-x) dx = \int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Donc : $\left| n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \right| \leq \frac{Mn}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$.

Par le théorème des gendarmes, $n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1)$$

5. Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+2t} dt$ et $v_n = 2^{n+1} n \int_0^{1/2} x^n \arctan(2x) dx$.

(0,5 pt)

Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

On applique le résultat de la question 4 avec $\varphi(t) = \frac{t}{1+2t}$.

On a $\varphi(1) = \frac{1}{3}$, et φ est dérivable de dérivée continue sur $[0, 1]$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \frac{t^n \cdot t}{1+2t} dt = \frac{1}{3}$.

Mais $u_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+2t} dt = n \int_0^1 \frac{t^n}{1+2t} dt$.

On applique le résultat avec $\varphi(t) = \frac{1}{1+2t}$, qui donne $\varphi(1) = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$:

$v_n = 2^{n+1} n \int_0^{1/2} x^n \arctan(2x) dx$.

Posons le changement de variable $x = \frac{t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$, et quand $x : 0 \rightarrow \frac{1}{2}$, $t : 0 \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} v_n &= 2^{n+1} n \int_0^1 \left(\frac{t}{2}\right)^n \arctan(t) \cdot \frac{dt}{2} = 2^{n+1} n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 t^n \arctan(t) dt \\ &= n \int_0^1 t^n \arctan(t) dt \end{aligned}$$

On applique la question 4 avec $\varphi(t) = \arctan(t)$, donc $\varphi(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1/3}{\pi/4} = \frac{4}{3\pi}$$

Exercice 3

3,5 pts

Nombres complexes

Partie I — Équation (E_m)

Soit $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{1, -i\}$.

On considère l'équation : $(E_m) : z^3 - (1 + (1+i)m)z^2 + ((1+i)m + im^2)z - im^2 = 0$.

1. Montrer que les nombres complexes 1 et m sont des solutions de (E_m) .

(0,25 pt)

Pour $z = 1$:

$$1 - (1 + (1+i)m) + ((1+i)m + im^2) - im^2 = 1 - 1 - (1+i)m + (1+i)m + im^2 - im^2 = 0 \quad \checkmark$$

Pour $z = m$:

$$\begin{aligned} m^3 - (1 + (1+i)m)m^2 + ((1+i)m + im^2)m - im^2 \\ = m^3 - m^2 - (1+i)m^3 + (1+i)m^2 + im^3 - im^2 \\ = m^3(1 - (1+i) + i) + m^2(-1 + (1+i) - i) \\ = m^3(1 - 1 - i + i) + m^2(-1 + 1 + i - i) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$z = 1$ et $z = m$ sont solutions de (E_m) .

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E_m) .

(0,25 pt)

Le polynôme $P(z) = z^3 - (1 + (1+i)m)z^2 + ((1+i)m + im^2)z - im^2$ admet 1 et m comme racines. Donc $P(z) = (z-1)(z-m)(z-z_3)$.

Par identification du coefficient dominant : le coefficient de z^3 est 1, ok.

Le produit des racines est $(-1)^3 \cdot \frac{-im^2}{1} = im^2$, donc $1 \cdot m \cdot z_3 = im^2$, d'où $z_3 = im$.

Vérification : $(z-1)(z-m)(z-im)$. Développons :

- Somme des racines = $1 + m + im = 1 + (1+i)m \quad \checkmark$
- Somme des produits deux à deux = $m + im + im^2 = (1+i)m + im^2 \quad \checkmark$
- Produit = $1 \cdot m \cdot im = im^2 \quad \checkmark$

L'ensemble des solutions de (E_m) est $\{1, m, im\}$.

Partie II — $m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, -1, 1\}$ et $|m| = 1$

A.

1. Montrer que $\left(\frac{m+i}{1+im}\right) - \left(\frac{m+i}{1+i\bar{m}}\right) = 0$ et $\left(\frac{\bar{m}+1}{\bar{m}-1}\right) + \left(\frac{m+1}{m-1}\right) = 0$.

(0,5 pt)

Comme $|m| = 1$, on a $m\bar{m} = 1$, donc $\bar{m} = \frac{1}{m}$.

Première égalité :

$1 + i\bar{m} = 1 + \frac{i}{m} = \frac{m+i}{m}$, donc $\frac{m+i}{1+i\bar{m}} = \frac{m+i}{\frac{m+i}{m}} = m$.

$1 + im$ est déjà donné, et $\frac{m+i}{1+im} = \frac{m+i}{1+im}$.

Notons que $m+i = i(1+im) \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{m+i}{1+im} \dots$ Montrons directement :

$\frac{m+i}{1+im}$: multiplions numérateur et dénominateur par $\overline{1+im} = 1 - i\bar{m} = 1 - \frac{i}{m} = \frac{m-i}{m}$.

En fait, plus simplement : $\frac{m+i}{1+im} = \frac{m+i}{i(\frac{1}{i}+m)} = \frac{m+i}{i(m-i)} \dots$ Non.

Procédons autrement. On a $\frac{m+i}{1+im}$. Divisons par m : $\frac{1+i/m}{1/m+i} = \frac{1+i\bar{m}}{\bar{m}+i} = \frac{1+i\bar{m}}{\bar{m}+i}$.

Donc $\frac{m+i}{1+im} = m \cdot \frac{1+i\bar{m}}{\bar{m}+i}$ et $\frac{m+i}{1+im} = m$ (déjà montré).

La différence :

$$\begin{aligned} \frac{m+i}{1+im} - \frac{m+i}{1+i\bar{m}} &= (m+i) \left(\frac{1}{1+im} - \frac{1}{1+i\bar{m}} \right) \\ &= (m+i) \cdot \frac{(1+i\bar{m}) - (1+im)}{(1+im)(1+i\bar{m})} = (m+i) \cdot \frac{i(\bar{m}-m)}{(1+im)(1+i\bar{m})} \end{aligned}$$

Or $\bar{m} - m = -2i \operatorname{Im}(m)$ et $i(\bar{m} - m) = 2 \operatorname{Im}(m)$.

Aussi, $m\bar{m} = 1$, d'où $(1+im)(1+i\bar{m}) = 1 + i(\bar{m}+m) + i^2 m\bar{m} = 1 + 2i \operatorname{Re}(m) - 1 = 2i \operatorname{Re}(m)$.

Donc la différence = $\frac{(m+i) \cdot 2 \operatorname{Im}(m)}{2i \operatorname{Re}(m)} = \frac{(m+i) \operatorname{Im}(m)}{i \operatorname{Re}(m)}$.

Cela n'est pas nécessairement nul en général. Revenons à l'énoncé.

L'énoncé demande de montrer que $\left(\frac{m+i}{1+im}\right) - \left(\frac{m+i}{1+i\bar{m}}\right) = 0$, ce qui signifie que $\frac{m+i}{1+im}$ est réel.

Calculons $\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{\bar{m}-i}{1-i\bar{m}}$.

Or $\bar{m} = \frac{1}{m}$, donc $\frac{\bar{m}-i}{1-i\bar{m}} = \frac{\frac{1}{m}-i}{1-\frac{i}{m}} = \frac{\frac{1-im}{m}}{\frac{m-i}{m}} = \frac{1-im}{m-i} = \frac{-(im-1)}{-(i-m)} \cdot \frac{i}{i}$.

Hmm, regardons autrement : $\frac{m+i}{1+im} \cdot \frac{i}{i} = \frac{im-1}{i+i^2m} = \frac{im-1}{i-m} = \frac{im-1}{i-m} = \frac{-(1-im)}{-(m-i)} = \frac{1-im}{m-i}$.

Et $\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{\bar{m}-i}{1-i\bar{m}} = \frac{1/m-i}{1-i/m} = \frac{1-im}{m-i}$.

Donc $\frac{m+i}{1+im} = \overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)}$ ssi $\frac{m+i}{1+im} = \frac{1-im}{m-i}$.

Vérifions : $(m+i)(m-i) = m^2 + 1$ et $(1+im)(1-im) = 1 + m^2$. Donc c'est vrai.

Ainsi $\frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R}$.

Seconde égalité : Montrons $\left(\frac{\bar{m}+1}{\bar{m}-1}\right) + \left(\frac{m+1}{m-1}\right) = 0$.

Avec $\bar{m} = \frac{1}{m}$:

$$\frac{\bar{m}+1}{\bar{m}-1} = \frac{\frac{1}{m}+1}{\frac{1}{m}-1} = \frac{1+m}{1-m} = -\frac{m+1}{m-1}$$

Donc $\frac{\bar{m}+1}{\bar{m}-1} + \frac{m+1}{m-1} = -\frac{m+1}{m-1} + \frac{m+1}{m-1} = 0$. ✓

$$\frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{m}+1}{\bar{m}-1} + \frac{m+1}{m-1} = 0.$$

2. Montrer que $(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right)$ est un imaginaire pur.

(0,25 pt)

On a montré que $\frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R}$, notons $r = \frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\frac{\overline{m+1}}{\overline{m-1}}$ est un imaginaire pur.

On a $\frac{\overline{m+1}}{\overline{m-1}} = -\frac{m+1}{m-1}$, donc $\frac{m+1}{m-1} + \left(\frac{m+1}{m-1} \right) = \frac{m+1}{m-1} + \frac{\overline{m+1}}{\overline{m-1}} = 0$.

Cela signifie que $\operatorname{Re} \left(\frac{m+1}{m-1} \right) = 0$, donc $\frac{m+1}{m-1}$ est un imaginaire pur.

Or $(1+i) \frac{m-1}{m+i}$. Calculons :

$$(1+i) \frac{m-1}{m+i} = (1+i) \frac{(m-1)(m-i)}{(m+i)(m-i)} = (1+i) \frac{(m-1)(m-i)}{m^2+1}$$

Montrons directement. Posons $w = (1+i) \frac{m-1}{m+i}$.

$$\frac{m-1}{m+i} = \frac{(m-1)\overline{(m+i)}}{|m+i|^2} = \frac{(m-1)(\overline{m}-i)}{|m+i|^2}.$$

Avec $\overline{m} = 1/m : (m-1) \left(\frac{1}{m} - i \right) = \frac{(m-1)(1-im)}{m}$.

Notons que $\frac{m+1}{m-1} = iy$ pour un $y \in \mathbb{R}$ (imaginaire pur), donc $m+1 = iy(m-1)$ et $m = \frac{iy-1}{iy+1} \cdot (-1) = \frac{1+iy}{1-iy} \dots$

Montrons plutôt que $\overline{w} = -w$:

$$\overline{w} = (1-i) \frac{\overline{m-1}}{\overline{m+i}} = (1-i) \frac{1/m-1}{1/m+i} = (1-i) \frac{1-m}{1+im}$$

Et $w = (1+i) \frac{m-1}{m+i}$.

$$\frac{\overline{w}}{w} = \frac{(1-i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-m)}{(m-1)} \cdot \frac{(m+i)}{(1+im)} = \frac{1-i}{1+i} \cdot (-1) \cdot \frac{m+i}{1+im}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Donc $\frac{\overline{w}}{w} = -i \cdot (-1) \cdot r = ir$ où $r = \frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R}$.

Pour que w soit imaginaire pur, il faut $\overline{w} = -w$, i.e. $\frac{\overline{w}}{w} = -1$, i.e. $ir = -1$, i.e. $r = i$, ce qui n'est pas réel en général.

Reconsidérons l'énoncé. La quantité à étudier est $(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right)$.

Écrivons $m = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

$$m-1 = e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin(\alpha/2) e^{i\alpha/2}.$$

$$m+i = e^{i\alpha} + e^{i\pi/2} = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\pi/2}{2}\right) e^{i(\alpha+\pi/2)/2} = 2 \cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right) e^{i(2\alpha+\pi)/4}.$$

$$\frac{m-1}{m+i} = \frac{2i \sin(\alpha/2) e^{i\alpha/2}}{2 \cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right) e^{i(2\alpha+\pi)/4}} = \frac{i \sin(\alpha/2)}{\cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right)} \cdot e^{i(\alpha/2-(2\alpha+\pi)/4)}$$

$$\alpha/2 - (2\alpha+\pi)/4 = \frac{2\alpha-2\alpha-\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc } \frac{m-1}{m+i} = \frac{i \sin(\alpha/2)}{\cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right)} \cdot e^{-i\pi/4}.$$

$$\text{Et } (1+i) \frac{m-1}{m+i} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \cdot \frac{i \sin(\alpha/2)}{\cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right)} \cdot e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2} i \sin(\alpha/2)}{\cos\left(\frac{2\alpha-\pi}{4}\right)}.$$

Ceci est bien un **imaginaire pur** (produit d'un réel par i).

$$(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right) \text{ est un imaginaire pur.}$$

B. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, E et F d'affixes respectives $a = m, b = 1, c = im, e = \frac{1}{2}(1+i)(m-i)$ et $f = \frac{1}{2}(1+i)(1+m)$.

1-a) Montrer que $\frac{e-c}{e-b} = -i \cdot \left(\frac{m+1}{m-1} \right)$.

(0,5 pt)

Calculons $e - c = \frac{1}{2}(1+i)(m-i) - im$.

$$\begin{aligned} &= \frac{(1+i)(m-i)}{2} - im = \frac{m-i+im+1}{2} - im = \frac{m+1+i(m-1)}{2} - im \\ &= \frac{m+1+im-i-2im}{2} = \frac{m+1-im-i}{2} = \frac{(m+1)-i(m+1)}{2} = \frac{(1-i)(m+1)}{2} \end{aligned}$$

Calculons $e - b = \frac{1}{2}(1+i)(m-i) - 1$.

$$= \frac{m-i+im+1}{2} - 1 = \frac{m-i+im+1-2}{2} = \frac{m-1+i(m-1)}{2} = \frac{(1+i)(m-1)}{2}$$

Donc :

$$\frac{e-c}{e-b} = \frac{(1-i)(m+1)}{(1+i)(m-1)} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} \cdot \frac{m+1}{m-1} = \frac{-2i}{2} \cdot \frac{m+1}{m-1} = -i \cdot \frac{m+1}{m-1}$$

$$\boxed{\frac{e-c}{e-b} = -i \cdot \frac{m+1}{m-1}}$$

1-b) En déduire que $E \in (BC)$.

(0,25 pt)

On a montré que $\frac{m+1}{m-1}$ est un imaginaire pur (car $|m| = 1$ et $m \neq \pm 1$).

Posons $\frac{m+1}{m-1} = iy$ avec $y \in \mathbb{R}^*$.

Alors $\frac{e-c}{e-b} = -i \cdot iy = y \in \mathbb{R}^*$.

Donc les points B , C , E sont alignés, i.e. $E \in (BC)$.

$E \in (BC)$.

2-a) Montrer que $\frac{e-a}{c-b} = \frac{1}{2}(1+i) \cdot \left(\frac{m-1}{m+i}\right)$. (0,5 pt)

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{\frac{1}{2}(1+i)(m-i) - m}{im-1} = \frac{\frac{m-i+im+1-2m}{2}}{im-1} = \frac{\frac{-m-i+im+1}{2}}{im-1} = \frac{\frac{(1-m)+i(m-1)}{2}}{im-1} = \frac{(m-1)(i-1)}{2(im-1)}.$$

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{(m-1)(i-1)}{2(im-1)} = \frac{(m-1)(i-1)}{2i(m+i) \cdot \frac{im-1}{i(m+i)}}$$

Notons que $im-1 = i(m+i) - 1 - i \cdot i = i(m+i) + 1 - 1 \dots$ Plus simplement :

$im-1 = -(1-im) = -(1+i(-m))$. Et $m+i$.

$\frac{(m-1)(i-1)}{2(im-1)}$. Notons que $im-1 = i(m-(-i)) = i(m+i) \cdot \frac{im-1}{i(m+i)} \dots$

En fait : $im-1 = i \cdot m - 1$. Divisons par $m+i$:

$$\frac{im-1}{m+i} = \frac{i(m+i)-i^2-1}{m+i} = \frac{i(m+i)-(1-1)}{m+i} \dots \text{Non : } im-1 = i(m+i) - i \cdot i - 1 = i(m+i) + 1 - 1 = i(m+i).$$

Vérifions : $i(m+i) = im + i^2 = im - 1$. Oui !

Donc $im-1 = i(m+i)$.

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{(m-1)(i-1)}{2 \cdot i(m+i)} = \frac{(m-1)(i-1)}{2i(m+i)}$$

$$\text{Or } \frac{i-1}{i} = \frac{(i-1)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i^2+i}{1} = 1+i.$$

$$\text{Donc } \frac{(i-1)}{2i} = \frac{1+i}{2}.$$

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{m-1}{m+i} = \frac{1}{2}(1+i) \cdot \frac{m-1}{m+i}$$

$$\boxed{\frac{e-a}{c-b} = \frac{1}{2}(1+i) \cdot \frac{m-1}{m+i}}$$

2-b) En déduire que $(AE) \perp (BC)$. (0,25 pt)

On a montré (question A.2) que $(1+i)\frac{m-1}{m+i}$ est un imaginaire pur.

Donc $\frac{e-a}{c-b} = \frac{1}{2}(1+i)\frac{m-1}{m+i}$ est un imaginaire pur (produit d'un réel $\frac{1}{2}$ par un imaginaire pur).

Or $\frac{e-a}{c-b} \in i\mathbb{R}^*$ signifie que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires.

$(AE) \perp (BC)$.

3-a) Montrer que $\frac{f-c}{f-a} = -i \cdot \left(\frac{m+i}{1+im} \right)$. (0,25 pt)

$$f-c = \frac{1}{2}(1+i)(1+m) - im = \frac{1+m+i+im-2im}{2} = \frac{1+m+i-im}{2} = \frac{(1+m)+i(1-m)}{2} = \frac{(1-i)(-(m-1))+2}{2} \dots$$

$$\text{Calculons directement : } f-c = \frac{1+m+i+im}{2} - im = \frac{1+m+i+im-2im}{2} = \frac{1+m+i-im}{2}.$$

$$f-a = \frac{1}{2}(1+i)(1+m) - m = \frac{1+m+i+im-2m}{2} = \frac{1-m+i+im}{2} = \frac{1-m+i(1+m)}{2}.$$

Donc :

$$\frac{f-c}{f-a} = \frac{1+m+i(1-m)}{1-m+i(1+m)}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur : $(1-m) - i(1+m)$.

$$\begin{aligned} \text{Num : } (1+m+i(1-m))((1-m)-i(1+m)) &= (1+m)(1-m) - i(1+m)^2 + i(1-m)(1-m) - \\ i^2(1-m)(1+m) &= (1-m^2) - i(1+m)^2 + i(1-m)^2 + (1-m^2) = 2(1-m^2) + i((1-m)^2 - (1+m)^2) \\ &= 2(1-m^2) + i(-4m) = 2(1-m^2) - 4im. \end{aligned}$$

$$\text{Dén : } (1-m)^2 + (1+m)^2 = 1 - 2m + m^2 + 1 + 2m + m^2 = 2 + 2m^2.$$

$$\text{Donc } \frac{f-c}{f-a} = \frac{2(1-m^2)-4im}{2(1+m^2)} = \frac{1-m^2-2im}{1+m^2}.$$

$$\text{Or } 1-m^2-2im = -(m^2+2im-1) = -(m+i)^2 + i^2 - (-1) \dots \text{Non : } (m+i)^2 = m^2 + 2im - 1.$$

$$\text{Donc } 1-m^2-2im = -(m^2+2im-1) = -(m+i)^2 + (-1+1) = -(m+i)^2 \dots \text{Vérifions :}$$

$$(m+i)^2 = m^2 + 2im + i^2 = m^2 + 2im - 1.$$

$$-(m^2+2im-1) = -m^2-2im+1 = 1-m^2-2im. \text{ Oui!}$$

$$\text{Donc } \frac{f-c}{f-a} = \frac{-(m+i)^2}{1+m^2}.$$

$$\text{Or } 1+m^2 = ? \text{ Et } (1+im)(1-im) = 1+m^2 \text{ (car } -i^2m^2 = m^2 \text{)}. \text{ Hmm, non : } (1+im)(1-im) = 1-i^2m^2 = 1+m^2. \text{ Oui!}$$

$$\text{Aussi } -(m+i)^2. \text{ Peut-on écrire } \frac{-(m+i)^2}{(1+im)(1-im)} ?$$

$$\text{On cherche } -i \cdot \frac{m+i}{1+im}. \text{ Calculons : } -i \cdot \frac{m+i}{1+im} = \frac{-i(m+i)}{1+im} = \frac{-im+1}{1+im} = \frac{1-im}{1+im}.$$

$$\text{Or notre résultat est } \frac{-(m+i)^2}{1+m^2} = \frac{-(m+i)^2}{(1+im)(1-im)}.$$

$$\frac{-(m+i)^2}{(1+im)(1-im)} = \frac{-(m+i)}{1+im} \cdot \frac{m+i}{1-im}.$$

$$\text{Notons que } \frac{m+i}{1-im} = \frac{m+i}{-(im-1)} = \frac{m+i}{-i(m+i)} = \frac{1}{-i} = i.$$

$$\text{Donc } \frac{f-c}{f-a} = \frac{-(m+i)}{1+im} \cdot i = -i \cdot \frac{m+i}{1+im}.$$

$$\boxed{\frac{f-c}{f-a} = -i \cdot \frac{m+i}{1+im}}$$

3-b) En déduire que A, E, C, F sont cocycliques.

(0,5 pt)

On a $\frac{f-c}{f-a} = -i \cdot \frac{m+i}{1+im}$.

On a montré que $\frac{m+i}{1+im} \in \mathbb{R}$ (question A.1).

Donc $\frac{f-c}{f-a} \in i\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\arg\left(\frac{f-c}{f-a}\right) = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Par ailleurs, on a montré que $\frac{e-c}{e-b} = y \in \mathbb{R}^*$ (question 1-b), donc $E \in (BC)$.

Pour la cocyclicité de A, E, C, F , il faut montrer que $\arg\left(\frac{f-c}{f-a}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{e-a}\right) [\pi]$.

$\frac{e-c}{e-a}$: on a $e-c = \frac{(1-i)(m+1)}{2}$ et $e-a = \frac{(m-1)(i-1)}{2}$.

$\frac{e-c}{e-a} = \frac{(1-i)(m+1)}{(m-1)(i-1)} = \frac{(1-i)(m+1)}{-(m-1)(1-i)} = \frac{-(m+1)}{m-1}$.

Or $\frac{m+1}{m-1}$ est un imaginaire pur, donc $\frac{e-c}{e-a} = -\frac{m+1}{m-1} \in i\mathbb{R}$.

Donc $\arg\left(\frac{e-c}{e-a}\right) = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $\arg\left(\frac{f-c}{f-a}\right) = \pm \frac{\pi}{2} [\pi]$.

L'angle (CA, CF) vu de F et l'angle (CA, CE) vu de E sont tous deux égaux à $\pm \frac{\pi}{2}$ modulo π .

Les quatre points A, E, C, F sont donc cocycliques (le lieu des points où un segment est vu sous un angle constant modulo π est un cercle).

Les points A, E, C et F sont cocycliques.

Exercice 4

3 pts

Arithmétique et probabilités

Partie I — Équation diophantienne

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x - 6y = 2$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{(4 + 6k, 3 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$. (0,25 pt)

On cherche une solution particulière. En essayant $x = 4, y = 3 : 5(4) - 6(3) = 20 - 18 = 2$. ✓

L'équation homogène associée est $5x - 6y = 0$, soit $5x = 6y$. Comme $\gcd(5, 6) = 1$, les solutions sont $x = 6k, y = 5k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{(4 + 6k, 3 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Soit (x, y) une solution de (E) et d le plus grand diviseur commun de x et y .

2-a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

(0,25 pt)

Si $d = \gcd(x, y)$, alors $d \mid x$ et $d \mid y$, donc $d \mid (5x - 6y)$, i.e. $d \mid 2$.

Les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.

Les valeurs possibles de d sont $d \in \{1, 2\}$.

2-b) Déterminer les couples (x, y) pour lesquels $d = 1$.

(0,25 pt)

On a $(x, y) = (4 + 6k, 3 + 5k)$.

$d = \gcd(4 + 6k, 3 + 5k)$.

Comme $5(4 + 6k) - 6(3 + 5k) = 20 + 30k - 18 - 30k = 2$, on a $\gcd(4 + 6k, 3 + 5k) \mid 2$.

$d = 2$ ssi $4 + 6k \equiv 0 \pmod{2}$ et $3 + 5k \equiv 0 \pmod{2}$.

$4 + 6k$ est toujours pair. $3 + 5k$ est pair ssi k est impair.

Donc $d = 2$ ssi k est impair, et $d = 1$ ssi k est pair.

Les couples pour lesquels $d = 1$ sont $(x, y) = (4 + 6k, 3 + 5k)$ avec k pair, i.e. $k = 2p, p \in \mathbb{Z}$:

$$\{(4 + 12p, 3 + 10p) / p \in \mathbb{Z}\}$$

Partie II — Arithmétique en base b

Soient $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On considère l'écriture de n dans le système de numération de base b : $n = \sum_{i=0}^p a_i b^i$ avec $a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ et $a_p \neq 0$.

On pose $S_b(n) = \sum_{i=0}^p a_i$ (la somme des chiffres de n en base b).

1. Montrer que $S_b(n) \equiv n \pmod{b-1}$.

(0,5 pt)

Pour tout $i \geq 0$: $b \equiv 1 \pmod{b-1}$, donc $b^i \equiv 1 \pmod{b-1}$.

Ainsi $n = \sum_{i=0}^p a_i b^i \equiv \sum_{i=0}^p a_i \cdot 1 = S_b(n) \pmod{b-1}$.

$$S_b(n) \equiv n \pmod{b-1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le couple $(S_5(n), S_6(n))$ est une solution de (E) avec $S_5(n)$ et $S_6(n)$ premiers entre eux.

2-a) Montrer que $n \equiv 0 \pmod{4}$ et $n \equiv 3 \pmod{5}$.

(0,25 pt)

$(S_5(n), S_6(n))$ est solution de (E) : $5S_5(n) - 6S_6(n) = 2$.

De la Partie I, Q1 : $S_5(n) = 4 + 6k$ et $S_6(n) = 3 + 5k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

De plus $\gcd(S_5(n), S_6(n)) = 1$, donc k est pair (Partie I, Q2-b).

De la question 1 : $S_5(n) \equiv n \pmod{4}$ (car $b-1 = 4$ pour la base 5).

$S_5(n) = 4 + 6k \equiv 0 + 2k \pmod{4}$. Comme k est pair, $k = 2p$, donc $S_5(n) \equiv 4p \equiv 0 \pmod{4}$.

Ainsi $n \equiv 0 \pmod{4}$.

De même, $S_6(n) \equiv n \pmod{5}$ (car $b-1 = 5$ pour la base 6).

$S_6(n) = 3 + 5k \equiv 3 \pmod{5}$.

Donc $n \equiv 3 \pmod{5}$.

$$n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } n \equiv 3 \pmod{5}.$$

2-b) En déduire que $n \equiv 8 \pmod{20}$.

(0,25 pt)

Par le théorème chinois ($\gcd(4, 5) = 1$), le système :

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

admet une solution unique modulo 20.

$n = 4m$ avec $4m \equiv 3 \pmod{5}$, donc $4m \equiv 3 \pmod{5}$, i.e. $m \equiv 3 \cdot 4^{-1} \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{5}$.

Donc $m = 5j + 2$ et $n = 4(5j + 2) = 20j + 8$.

$$\boxed{n \equiv 8 \pmod{20}}$$

3-a) Calculer $S_5(28)$ et $S_6(28)$.

(0,5 pt)

$S_5(28)$: $28 = 1 \times 25 + 0 \times 5 + 3 = 103_5$. Donc $S_5(28) = 1 + 0 + 3 = 4$.

$S_6(28)$: $28 = 4 \times 6 + 4 = 44_6$. Donc $S_6(28) = 4 + 4 = 8$.

$$S_5(28) = 4 \quad \text{et} \quad S_6(28) = 8.$$

3-b) Le couple $(S_5(28), S_6(28))$ est-il une solution de (E) ? Justifier.

(0,25 pt)

Vérifions : $5 \times 4 - 6 \times 8 = 20 - 48 = -28 \neq 2$.

Non, le couple $(4, 8)$ n'est pas une solution de (E) .

Partie III — Probabilités

On considère une urne contenant 25 boules numérotées de 1 à 25, indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne et on note le couple (x, y) obtenu (x est le numéro de la première boule, y celui de la deuxième).

Soit V l'événement « le couple (x, y) obtenu est une solution de l'équation (E) ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement V est $p = 64 \cdot 10^{-4}$.

(0,25 pt)

Les solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont $(4 + 6k, 3 + 5k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

On cherche les couples (x, y) avec $1 \leq x \leq 25$ et $1 \leq y \leq 25$:

- $k = 0$: $(4, 3)$ ✓
- $k = 1$: $(10, 8)$ ✓
- $k = 2$: $(16, 13)$ ✓
- $k = 3$: $(22, 18)$ ✓
- $k = -1$: $(-2, -2)$ (hors bornes)

Il y a 4 couples favorables sur $25 \times 25 = 625$ possibles.

$$p = \frac{4}{625} = \frac{4}{625} = 0,0064 = 64 \times 10^{-4}.$$

$$\boxed{p = 64 \cdot 10^{-4}}$$

2. On répète cette expérience 10 fois de manière indépendante avec remise. Calculer la probabilité de réalisation de V exactement deux fois. (0,25 pt)

On suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10, p)$ avec $p = 64 \times 10^{-4} = 0,0064$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = 45 \times (0,0064)^2 \times (0,9936)^8$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times (64 \times 10^{-4})^2 \times (1 - 64 \times 10^{-4})^8 = 45 \times (64)^2 \times 10^{-8} \times (0,9936)^8$$

Exercice 5

3,5 pts

Structures algébriques

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif, de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Pour tout réel x , on pose $M(x) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est stable dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculons $M(x) \times M(y)$:

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^y & a^y - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^x \cdot a^y + (a^x - 1) \cdot 0 & a^x(a^y - 1) + (a^x - 1) \cdot 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \cdot a^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{x+y} & a^{x+y} - a^x + a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{x+y} & a^{x+y} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{x+y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $M(x) \times M(y) = M(x+y) \in E$.

E est stable pour la multiplication matricielle : $\forall x, y \in \mathbb{R}, M(x) \times M(y) = M(x+y) \in E$.

2-a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$, où $\varphi(x) = M(x)$. (0,5 pt)

Morphisme : On a montré que $M(x) \times M(y) = M(x + y)$, donc $\varphi(x + y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$.

Injectivité : Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors $M(x) = M(y)$, ce qui donne $a^x = a^y$. Comme $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction $t \mapsto a^t$ est injective, donc $x = y$.

Surjectivité : Par définition de $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$, tout élément de E est de la forme $M(x) = \varphi(x)$.

$\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (E, \times)$ définie par $\varphi(x) = M(x)$ est un isomorphisme de groupes.

2-b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. Comme φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$, l'image $(E, \times)$ est aussi un groupe commutatif.

Détail : L'élément neutre de $(E, \times)$ est $\varphi(0) = M(0) = I$, et l'inverse de $M(x)$ est $M(-x)$. La commutativité vient de $M(x) \times M(y) = M(x + y) = M(y + x) = M(y) \times M(x)$.

$(E, \times)$ est un groupe commutatif.

3. On prend $a = 5$ et on pose

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

3-a) Vérifier que $A \in E$ et $B \in E$. (0,5 pt)

Pour A : on cherche x tel que $a^x = 5^x = \frac{1}{25} = 5^{-2}$, donc $x = -2$.

$$\text{Vérifions : } M(-2) = \begin{pmatrix} 5^{-2} & 5^{-2} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{1}{25} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} = A. \quad \checkmark$$

Donc $A = M(-2) \in E$.

Pour B : on cherche x tel que $5^x = 25 = 5^2$, donc $x = 2$.

$$M(2) = \begin{pmatrix} 25 & 25 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = B. \quad \checkmark$$

Donc $B = M(2) \in E$.

$A = M(-2) \in E$ et $B = M(2) \in E$.

3-b) Résoudre dans E l'équation $A^5 \times X^6 = B^{2026}$.

(0,75 pt)

Dans $(E, \times)$, tout élément s'écrit $M(x)$. On a $A = M(-2)$ et $B = M(2)$.

$$A^5 = M(-2)^5 = M(-10) \quad (\text{car } M(x)^n = M(nx)).$$

$$B^{2026} = M(2)^{2026} = M(4052).$$

Posons $X = M(t)$, alors $X^6 = M(6t)$.

L'équation devient :

$$M(-10) \times M(6t) = M(4052) \implies M(-10 + 6t) = M(4052)$$

$$-10 + 6t = 4052 \implies 6t = 4062 \implies t = 677$$

$$X = M(677) = \begin{pmatrix} 5^{677} & 5^{677} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{677} \end{pmatrix}$$

4-a) On munit E de la loi de composition interne T définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} xy\right).$$

Montrer que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

(0,5 pt)

Stabilité : Si $M(x), M(y) \in E \setminus \{I\}$, alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$, donc $\frac{xy}{\sqrt{2}} \neq 0$, et $M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) \in E \setminus \{I\}$.

Commutativité : $M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{yx}{\sqrt{2}}\right) = M(y) T M(x)$.

Associativité :

$$(M(x) T M(y)) T M(z) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) T M(z) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} \cdot z\right) = M\left(\frac{xyz}{2}\right)$$

$$M(x) T (M(y) T M(z)) = M(x) T M\left(\frac{yz}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x \cdot \frac{yz}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{xyz}{2}\right)$$

Donc T est associative.

Élément neutre : On cherche e tel que $M(x) T M(e) = M(x)$ pour tout $x \neq 0$.

$$M\left(\frac{xe}{\sqrt{2}}\right) = M(x), \text{ donc } \frac{xe}{\sqrt{2}} = x, \text{ i.e. } e = \sqrt{2}.$$

$M(\sqrt{2}) \in E \setminus \{I\}$ car $\sqrt{2} \neq 0$. ✓

Inverse : Pour $M(x)$ avec $x \neq 0$, on cherche $M(y)$ tel que $M(x) T M(y) = M(\sqrt{2})$.

$\frac{xy}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, donc $y = \frac{2}{x}$. Comme $x \neq 0$, $y = \frac{2}{x} \neq 0$, donc $M(y) \in E \setminus \{I\}$.

$(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(\sqrt{2})$.

4-b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

(0,5 pt)

Il faut vérifier que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif :

$(E, \times)$ est un **groupe commutatif** (déjà montré, Q2-b), d'élément neutre $M(0) = I$.

$(E \setminus \{I\}, T)$ est un **groupe commutatif** (déjà montré, Q4-a).

Distributivité de $\times$ par rapport à T :

$$M(x) \times (M(y) T M(z)) = M(x) \times M\left(\frac{yz}{\sqrt{2}}\right) = M\left(x + \frac{yz}{\sqrt{2}}\right).$$

$$(M(x) \times M(y)) T (M(x) \times M(z)) = M(x + y) T M(x + z) = M\left(\frac{(x+y)(x+z)}{\sqrt{2}}\right).$$

Pour la distributivité, il faudrait $x + \frac{yz}{\sqrt{2}} = \frac{(x+y)(x+z)}{\sqrt{2}}$, ce qui n'est vrai qu'en général si...

En fait, dans ce contexte, les lois sont $\times$ (qui joue le rôle de l'addition du corps, via $M(x) \times M(y) = M(x + y)$) et T (qui joue le rôle de la multiplication du corps).

Pour un corps $(E, \times, T)$:

- $(E, \times)$ est un groupe abélien (l'« addition » du corps) — vérifié.
- $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe abélien (la « multiplication » du corps) — vérifié ($I = M(0)$ est le zéro).
- **Distributivité de T par rapport à $\times$:**

$$M(x) T (M(y) \times M(z)) = M(x) T M(y + z) = M\left(\frac{x(y+z)}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{xy+xz}{\sqrt{2}}\right).$$

$$(M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) \times M\left(\frac{xz}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xz}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{xy+xz}{\sqrt{2}}\right).$$

Les deux expressions sont égales. ✓

Vérification de l'élément absorbant : $M(0) T M(x) = M\left(\frac{0 \cdot x}{\sqrt{2}}\right) = M(0) = I$ pour tout x .

Donc I (le neutre de $\times$) est absorbant pour T . ✓

$(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

Remarque : Via l'isomorphisme $\varphi : x \mapsto M(x)$, ce corps est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \star)$ où $x \star y = \frac{xy}{\sqrt{2}}$, lui-même isomorphe au corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ classique via le changement $x \mapsto \sqrt{2}x$.

Fin du corrigé

Mathématiques — Sciences Mathématiques A & B

Session de Rattrapage 2026

monbac.ma

Plateforme de préparation au Baccalauréat marocain