

Correction — Mathématiques SM — Session de Rattrapage 2025

Exercice 1 (7.75 points) — Analyse

On considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} \quad \text{si } x \in]0; +\infty[$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

1-a) Étude de la continuité de f à droite en 0

On doit calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et vérifier qu'elle vaut $f(0) = 0$.

Pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ (croissance comparée). De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0 = f(0).$$

f est continue à droite en 0.

1-b) Étude de la dérivabilité de f à droite en 0

On calcule :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Interprétation graphique : La courbe (C) admet au point $O(0, 0)$ une demi-tangente à droite qui est horizontale (confondue avec l'axe des abscisses).

1-c) Limites en $+\infty$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $1 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = \frac{\ln x}{x + \frac{1}{x}}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissance comparée) et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

Interprétation graphique : La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

2-a) Tableau de variations de φ

Soit φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$.

φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x} = \frac{2(x^2 + 1)}{x}$$

Pour tout $x > 0$, on a $x^2 + 1 > 0$ et $x > 0$, donc $\varphi'(x) > 0$.

Ainsi φ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 + 1 + 2(-\infty) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-b) Solution unique β de $\varphi(x) = 0$ dans $\left] \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$

φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] -\infty; +\infty[$. L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution β dans $]0; +\infty[$.

Vérifions que $\beta \in \left] \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 + 2 \ln \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - 2 \ln 2 \simeq 1.25 - 1.4 = -0.15 < 0$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} + 1 + 2 \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} - \ln 3 \simeq 1.333 - 1.1 = 0.233 > 0$$

Puisque $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et φ est strictement croissante et continue, par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\varphi(\beta) = 0 \text{ admet une unique solution } \beta \in \left] \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[}$$

2-c) Montrer que $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$

On a $\varphi(\beta) = 0$, donc $\beta^2 + 1 + 2 \ln \beta = 0$, d'où :

$$\ln \beta = -\frac{\beta^2 + 1}{2}$$

Ainsi :

$$f(\beta) = \frac{\beta^2 \ln \beta}{\beta^2 + 1} = \frac{\beta^2 \cdot \left(-\frac{\beta^2 + 1}{2}\right)}{\beta^2 + 1} = -\frac{\beta^2}{2}$$

$$f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$$

3-a) Dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$ et expression de f'

Pour $x > 0$, posons $u(x) = x^2 \ln x$ et $v(x) = x^2 + 1$.

$u'(x) = 2x \ln x + x$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x \ln x + x)(x^2 + 1) - x^2 \ln x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Développons le numérateur :

$$\begin{aligned} &= (2x \ln x + x)(x^2 + 1) - 2x^3 \ln x \\ &= 2x^3 \ln x + 2x \ln x + x^3 + x - 2x^3 \ln x \\ &= 2x \ln x + x^3 + x \\ &= x(2 \ln x + x^2 + 1) \\ &= x \varphi(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{x \varphi(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables avec $v(x) \neq 0$.

3-b) Tableau de variations de f

Pour $x > 0$: $x > 0$, $(x^2 + 1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\varphi(x)$.

D'après l'étude de φ :

- $\varphi(x) < 0$ pour $x \in]0; \beta[$, donc $f'(x) < 0$: f est décroissante.
- $\varphi(\beta) = 0$, donc $f'(\beta) = 0$.
- $\varphi(x) > 0$ pour $x \in]\beta; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$: f est croissante.

f admet un minimum en β : $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$.

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	0	− 0 +	
$f(x)$	0		$+\infty$
		$\searrow$ $-\frac{\beta^2}{2}$ $\nearrow$	

3-c) $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta; +\infty[$

Sur $]\beta; +\infty[$, f est strictement croissante et continue avec $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc f réalise une bijection de $]\beta; +\infty[$ sur $]-\frac{\beta^2}{2}; +\infty[$. Puisque $\frac{1}{2} > 0 > -\frac{\beta^2}{2}$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $]\beta; +\infty[$.

Vérifions que $x = \frac{1}{\beta}$ convient. On a $\varphi(\beta) = 0$, soit $\beta^2 + 1 + 2 \ln \beta = 0$, donc $\ln \beta = -\frac{\beta^2+1}{2}$ et $\ln \frac{1}{\beta} = \frac{\beta^2+1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta^2} \cdot \ln \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta^2} + 1} = \frac{\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\beta^2+1}{2}}{\frac{1+\beta^2}{\beta^2}} = \frac{\frac{\beta^2+1}{2\beta^2}}{\frac{\beta^2+1}{\beta^2}} = \frac{1}{2}$$

De plus $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3} > 1 > \beta$, donc $\frac{1}{\beta} \in]\beta; +\infty[$.

$\frac{1}{\beta} \text{ est l'unique solution de } f(x) = \frac{1}{2} \text{ sur }]\beta; +\infty[$

3-d) Tangente $y = \beta x - \frac{1}{2}$ au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$

La tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$ a pour équation :

$$y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

Calculons $f'\left(\frac{1}{\beta}\right)$. On a $\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^2} + 1 + 2 \ln \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta^2} + 1 - 2 \ln \beta$.

Or $\ln \beta = -\frac{\beta^2+1}{2}$, donc $-2 \ln \beta = \beta^2 + 1$ et :

$$\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^2} + 1 + \beta^2 + 1 = \frac{1}{\beta^2} + \beta^2 + 2 = \frac{1 + \beta^4 + 2\beta^2}{\beta^2} = \frac{(\beta^2 + 1)^2}{\beta^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{(\beta^2+1)^2}{\beta^2}}{\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2} = \frac{\frac{(\beta^2+1)^2}{\beta^3}}{\frac{(\beta^2+1)^2}{\beta^4}} = \frac{(\beta^2 + 1)^2}{\beta^3} \cdot \frac{\beta^4}{(\beta^2 + 1)^2} = \beta$$

Donc l'équation de la tangente est :

$$y = \beta\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2} = \beta x - 1 + \frac{1}{2} = \beta x - \frac{1}{2}$$

La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$ a pour équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$.

4) Représentation graphique de (C)

La courbe (C) passe par $O(0, 0)$ avec une demi-tangente horizontale à droite, décroît jusqu'au minimum $\left(\beta, -\frac{\beta^2}{2}\right)$ avec $\beta \approx 0.56$, puis croît vers $+\infty$ avec une branche parabolique de direction (Ox) . Elle admet deux points d'inflexion.

Partie II

On pose $J =]\sqrt{3}; 2[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})}$.

1-a) Étude des variations de g

$$g(x) = e^{h(x)} \text{ où } h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}.$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^3}, \text{ donc pour } x > 0 : h'(x) < 0.$$

Puisque l'exponentielle est croissante, g est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

1-b) Montrer que $\sqrt{3} < g(x) < 2$ pour tout $x \in J$

g est strictement décroissante sur $J =]\sqrt{3}; 2[$, donc :

$$g(2) < g(x) < g(\sqrt{3})$$

Calculons :

$$g(2) = e^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4})} = e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$$

$$g(\sqrt{3}) = e^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})} = e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$$

$$\text{Or } \sqrt{3} \simeq 1.73 < 1.87 \simeq e^{5/8} = g(2) \text{ et } g(\sqrt{3}) = e^{2/3} \simeq 1.95 < 2.$$

Donc pour tout $x \in J : \sqrt{3} < g(2) < g(x) < g(\sqrt{3}) < 2$.

$$\boxed{\forall x \in J, \quad \sqrt{3} < g(x) < 2}$$

Autrement dit, $g(J) \subset J$.

2-a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$

On a $\alpha = \frac{1}{\beta}$ et d'après la question I.3-c), $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$, soit $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc $2\alpha^2 \ln \alpha = \alpha^2 + 1$, soit $\ln \alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}$.

Alors :

$$g(\alpha) = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}} = e^{\ln \alpha} = \alpha$$

$$\boxed{g(\alpha) = \alpha}$$

Notons que $\alpha = \frac{1}{\beta} \in \left] \frac{1}{1/\sqrt{3}}; \frac{1}{1/2} \right[=]\sqrt{3}; 2[= J$, donc $\alpha \in J$.

2-b) Montrer que $|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ pour tout $x \in J$

On a :

$$g'(x) = h'(x) \cdot g(x) = -\frac{1}{x^3} \cdot g(x)$$

Pour $x \in J =]\sqrt{3}; 2[$:

$$— |g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3}$$

$$— g(x) < 2 \text{ (d'après 1-b)}$$

$$— x^3 > (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

Donc :

$$|g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\forall x \in J, \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

2-c) Montrer que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in J$, il existe c entre x et α (avec $c \in J$) tel que :

$$g(x) - g(\alpha) = g'(c)(x - \alpha)$$

Or $g(\alpha) = \alpha$, donc :

$$|g(x) - \alpha| = |g'(c)| \cdot |x - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$$

$$\boxed{\forall x \in J, \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|}$$

3) Étude de la suite (x_n)

On pose $x_0 = \frac{7}{4}$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3-a) Montrer que $x_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par récurrence.

Initialisation : $x_0 = \frac{7}{4} = 1.75$ et $\sqrt{3} \simeq 1.73 < 1.75 < 2$, donc $x_0 \in J$. ✓

Hérédité : Supposons $x_n \in J$. Alors $x_{n+1} = g(x_n)$ et d'après 1-b), $g(x_n) \in]\sqrt{3}; 2[= J$, donc $x_{n+1} \in J$. ✓

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in J}$$

3-b) Montrer par récurrence que $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$

Initialisation : Pour $n = 0$, $|x_0 - \alpha| \leq 1 \cdot |x_0 - \alpha|$. ✓

Hérédité : Supposons $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$.

On a $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_n \in J$, donc d'après 2-c) :

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha| = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|}$$

3-c) Convergence de (x_n) vers α

On a $\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \simeq 0.385 < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison < 1).

Par le théorème des gendarmes :

$$0 \leq |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $|x_n - \alpha| \rightarrow 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \alpha = \frac{1}{\beta}.}$$

Exercice 2 (2.25 points) — Analyse

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

1-a) Encadrement de $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$.

Puisque $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$ et $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$, on a :

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

1-b) Encadrement intégral

En intégrant l'inégalité précédente sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ (intervalle de longueur $\frac{1}{n}$) :

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

2-a) Somme des encadrements

En sommant pour k de 1 à $n-1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx.$$

Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)}$$

2-b) Encadrement de u_n

Le membre de droite vaut :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n}\right) - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + 0 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + \frac{\ln n}{n}$$

Attendez, reformulons. On a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n}\right) - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= u_n + 0 + \frac{\ln n}{n} = u_n + \frac{\ln n}{n}$$

Non, recalculons. En décalant l'indice : $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln(1) = u_n + \frac{\ln n}{n}$.

Plus précisément :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \frac{\ln n}{n} = u_n + \frac{\ln n}{n}$$

Hmm, reconsidérons directement. D'après 2-a) :

$$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n + \frac{\ln n}{n}}$$

soit : $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n + \frac{\ln n}{n}$, d'où $u_n \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx - \frac{\ln n}{n}$.

Mais aussi $u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx$.

Calculons $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{n}}^1 = (0 - 1) - \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}$.

Donc :

$$u_n \leq -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}$$

et

$$u_n \geq -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} = -1 + \frac{1}{n}$$

2-c) Montrer que $-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

D'après les calculs ci-dessus, on obtient l'encadrement :

$$\boxed{-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}}$$

Car $-\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{n}$.

2-d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}\right) = -1$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

Remarque : On retrouve $\int_0^1 \ln(x) dx = -1$ comme somme de Riemann.

Exercice 3 (3.5 points) — Nombres complexes

Soit $\theta \in [0, \pi[$.

Partie I

On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 + (1 - i)e^{i\theta}z - ie^{2i\theta} = 0$.

1-a) Vérifier que $(E_\theta) \Leftrightarrow (2z + (1 - i)e^{i\theta})^2 = ((1 + i)e^{i\theta})^2$

Développons $(2z + (1 - i)e^{i\theta})^2$:

$$= 4z^2 + 4z(1 - i)e^{i\theta} + (1 - i)^2 e^{2i\theta}$$

Or $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, donc :

$$= 4z^2 + 4(1 - i)e^{i\theta}z - 2ie^{2i\theta}$$

Et $((1 + i)e^{i\theta})^2 = (1 + i)^2 e^{2i\theta} = 2ie^{2i\theta}$.

Donc l'équation devient :

$$4z^2 + 4(1 - i)e^{i\theta}z - 2ie^{2i\theta} = 2ie^{2i\theta}$$

$$4z^2 + 4(1 - i)e^{i\theta}z - 4ie^{2i\theta} = 0$$

$$z^2 + (1 - i)e^{i\theta}z - ie^{2i\theta} = 0$$

C'est exactement (E_θ) . ✓

1-b) Solutions z_1 et z_2 avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$

De l'équivalence :

$$(2z + (1 - i)e^{i\theta})^2 = ((1 + i)e^{i\theta})^2$$

$$2z + (1 - i)e^{i\theta} = \pm(1 + i)e^{i\theta}$$

Cas + :

$$2z = [(1 + i) - (1 - i)] e^{i\theta} = 2ie^{i\theta}$$

$$z = ie^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

Cas - :

$$2z = [-(1 + i) - (1 - i)] e^{i\theta} = -2e^{i\theta}$$

$$z = -e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$$

Pour déterminer z_1 (avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$) :

$\text{Im}(ie^{i\theta}) = \text{Im}(e^{i(\theta + \pi/2)}) = \sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi[$.

$\text{Im}(-e^{i\theta}) = -\sin \theta \leq 0$ pour $\theta \in [0, \pi[$.

Donc :

$$z_1 = -e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)} \quad \text{et} \quad z_2 = ie^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi/2)}$$

2-a) Montrer que $\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$z_1 + 1 = -e^{i\theta} + 1 = 1 - e^{i\theta}$$

$$z_2 + i = ie^{i\theta} + i = i(e^{i\theta} + 1)$$

Donc :

$$\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = \frac{1 - e^{i\theta}}{i(1 + e^{i\theta})}$$

Factorisons par $e^{i\theta/2}$:

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2} \cdot (-2i \sin(\theta/2))$$

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2} \cdot 2 \cos(\theta/2)$$

Donc :

$$\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = \frac{-2i \sin(\theta/2)}{i \cdot 2 \cos(\theta/2)} = \frac{-\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

2-b) Forme exponentielle de $\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i}$

$$z_1 + iz_2 = -e^{i\theta} + i \cdot ie^{i\theta} = -e^{i\theta} - e^{i\theta} = -2e^{i\theta}$$

$$\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i} = \frac{-2e^{i\theta}}{i(1 + e^{i\theta})} = \frac{-2e^{i\theta}}{i \cdot e^{i\theta/2} \cdot 2 \cos(\theta/2)} = \frac{-e^{i\theta/2}}{i \cos(\theta/2)}$$

Or $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\pi/2}$, donc :

$$= \frac{-e^{i\theta/2} \cdot e^{-i\pi/2}}{\cos(\theta/2)} = \frac{-e^{i(\theta/2 - \pi/2)}}{\cos(\theta/2)}$$

Puisque $\theta \in [0, \pi[$, on a $\cos(\theta/2) > 0$, et $-1 = e^{i\pi}$, donc :

$$= \frac{e^{i\pi} \cdot e^{i(\theta/2 - \pi/2)}}{\cos(\theta/2)} = \frac{e^{i(\theta/2 + \pi/2)}}{\cos(\theta/2)}$$

$$\boxed{\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i} = \frac{1}{\cos(\theta/2)} e^{i(\theta/2 + \pi/2)}}$$

Partie II

Dans le plan complexe muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A, B, C d'affixes :

$$a = e^{i\theta}, \quad b = (1 + i)e^{i\theta}, \quad c = b - a = ie^{i\theta}$$

Soient $m \in]0; 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et Q d'affixe $q = me^{i\theta}$.

1-a) Affixe p de $P = R(Q)$

La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ multiplie l'affixe par $e^{i\pi/2} = i$.

$$p = iq = ime^{i\theta} = ie^{i\theta} \cdot m$$

1-b) Vérifier que $R(A) = C$

$R(A)$ a pour affixe $ia = ie^{i\theta} = c$. Donc $R(A) = C$. ✓

2) Étude du point H d'affixe $h = \frac{m}{m-i} e^{i\theta}$

2-a) Montrer que $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m} i$ et $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$

Premier rapport :

$$\begin{aligned} p - a &= ime^{i\theta} - e^{i\theta} = (im - 1)e^{i\theta} \\ \frac{p-a}{h} &= \frac{(im-1)e^{i\theta}}{\frac{m}{m-i}e^{i\theta}} = \frac{(im-1)(m-i)}{m} \end{aligned}$$

Calculons $(im-1)(m-i) = im^2 - i^2m - m + i = im^2 + m - m + i = im^2 + i = i(m^2+1)$.
Donc :

$$\frac{p-a}{h} = \frac{(m^2+1)i}{m}$$

Second rapport :

$$\begin{aligned} h - a &= \frac{m}{m-i}e^{i\theta} - e^{i\theta} = \frac{m - (m-i)}{m-i}e^{i\theta} = \frac{i}{m-i}e^{i\theta} \\ \frac{h-a}{p-a} &= \frac{\frac{i}{m-i}e^{i\theta}}{(im-1)e^{i\theta}} = \frac{i}{(m-i)(im-1)} \end{aligned}$$

Calculons $(m-i)(im-1) = im^2 - m - i^2m + i = im^2 - m + m + i = im^2 + i = i(m^2+1)$.

$$\frac{h-a}{p-a} = \frac{i}{i(m^2+1)} = \frac{1}{m^2+1}$$

$$\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$$

2-b) H est le projeté orthogonal de O sur (AP)

De $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i$, ce rapport est purement imaginaire (réel $\times i$).

Cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ (d'affixe $p-a$) est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OH}$ (d'affixe h).

Donc H est sur la droite (AP) ? Vérifions. De $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1} \in \mathbb{R}$, les points A, H, P sont alignés.

Ainsi $H \in (AP)$ et $OH \perp AP$, donc H est le projeté orthogonal de O sur (AP) .

2-c) Montrer que $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$

$$\begin{aligned} b-h &= (1+i)e^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta} = \left(1+i - \frac{m}{m-i}\right)e^{i\theta} \\ &= \frac{(1+i)(m-i) - m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{m-i+im-i^2-m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{-i+im+1}{m-i}e^{i\theta} = \frac{1+i(m-1)}{m-i}e^{i\theta} \end{aligned}$$

Attendons, recalculons : $(1+i)(m-i) = m-i+im-i^2 = m-i+im+1 = (m+1)+(m-1)i$

Donc :

$$b-h = \frac{(m+1)+(m-1)i-m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{1+(m-1)i}{m-i}e^{i\theta}$$

$$q-h = me^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta} = m\left(1 - \frac{1}{m-i}\right)e^{i\theta} = m \cdot \frac{m-i-1}{m-i}e^{i\theta} = \frac{m(m-1-i)}{m-i}e^{i\theta}$$

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{1+(m-1)i}{m(m-1-i)}$$

Notons que $1+(m-1)i = 1+(m-1)i$ et $m-1-i = (m-1)-i$.

Calculons $\frac{1+(m-1)i}{(m-1)-i}$. Multiplions par le conjugué :

$$\begin{aligned} &= \frac{(1+(m-1)i)((m-1)+i)}{(m-1)^2+1} = \frac{(m-1)+i+(m-1)^2i+i^2(m-1)}{(m-1)^2+1} \\ &= \frac{(m-1)-(m-1)+i(1+(m-1)^2)}{(m-1)^2+1} = \frac{i((m-1)^2+1)}{(m-1)^2+1} = i \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{i}{m} = \frac{1}{m}i$$

$$\boxed{\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i}$$

2-d) Les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires

Le rapport $\frac{b-h}{q-h} = \frac{i}{m}$ est purement imaginaire (car $\frac{1}{m} \in \mathbb{R}^*$, multiplié par i).

Donc $\arg\left(\frac{b-h}{q-h}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HQ}$ sont orthogonaux, soit :

Les droites (HB) et (QH) sont perpendiculaires.

2-e) Les points A , Q , H et B sont cocycliques

On a montré que :

— $(\widehat{HA}, \widehat{HP}) = \frac{\pi}{2}$ (car $OH \perp AP$ et $H \in (AP)$, donc l'angle $\widehat{AHO} = \frac{\pi}{2}$, et comme O est le sommet...)

Utilisons une autre approche. Montrons que $\arg\left(\frac{b-a}{q-a}\right) = \arg\left(\frac{b-h}{q-h}\right) \pmod{\pi}$.

$$\frac{b-a}{q-a} = \frac{(1+i)e^{i\theta} - e^{i\theta}}{me^{i\theta} - e^{i\theta}} = \frac{ie^{i\theta}}{(m-1)e^{i\theta}} = \frac{i}{m-1}$$

Ceci est purement imaginaire. Et $\frac{b-h}{q-h} = \frac{i}{m}$ est aussi purement imaginaire.

Les deux rapports sont purement imaginaires, donc leurs arguments sont de la forme $\pm\frac{\pi}{2}$.

Précisément : pour $m \in]0; 1[$, $m-1 < 0$ et $m > 0$, donc :

$$\arg\left(\frac{b-a}{q-a}\right) = \arg\left(\frac{i}{m-1}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\arg\left(\frac{b-h}{q-h}\right) = \arg\left(\frac{i}{m}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On a $-\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, donc les angles sont égaux modulo π .

Cela signifie que les points A, H, Q, B sont cocycliques (angles inscrits interceptant le même arc qui sous-tendent le même angle modulo π).

Les points A, Q, H et B sont cocycliques.

Exercice 4 (3 points) — Arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : \quad y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$$

où a, b, c, d sont des entiers naturels non nuls vérifiant $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

1) On suppose que (E) admet une solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1-a) Montrer que d divise bc

(x_0, y_0) est solution de (E) :

$$y_0 = \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{d}$$

En multipliant par bd :

$$bdy_0 = adx_0 - bc$$

Donc $bc = adx_0 - bdy_0 = d(ax_0) - b(dy_0)$.

Hmm, réécrivons : $adx_0 - bdy_0 = bc$, soit $d(ax_0 - by_0) = bc$.

Donc $d \mid bc$.

d divise bc .

1-b) En déduire que d divise b

On a $d \mid bc$ et $c \wedge d = 1$ (donné).

Par le lemme de Gauss, puisque $d \mid bc$ et $\text{pgcd}(c, d) = 1$, on déduit que :

$d \mid b$.

2) On suppose que d divise b et on pose $b = nd$

2-a) Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$

On a $b = nd$, donc $a \wedge b = a \wedge (nd) = 1$.

Puisque $\text{pgcd}(a, nd) = 1$, et $dn = b$, le théorème de Bézout assure l'existence de $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$dnu' - av' = 1$$

On peut toujours choisir $u' \geq 0$ et $v' \geq 0$ (quitte à ajuster par des multiples de a et dn respectivement). Donc :

$$\boxed{\exists (u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad dnu - av = 1}$$

2-b) Ensemble des solutions de (E)

L'équation (E) s'écrit $by - ax = -c$, soit $ndy - ax = -c$ (car $b = nd$).

Avec $dnu - av = 1$, on a $dn(-cu) - a(-cv) = -c(dnu - av) = -c$.

Donc $(x_0, y_0) = (-cv, -cu)$ est une solution particulière : $nd(-cu) - a(-cv) = -cdnu + acv = -c(dnu - av) = -c$. Mais $by_0 - ax_0 = -c$, vérifions : $nd(-cu) - a(-cv) = -cdnu + acv = -c$.
✓

On a alors $y_0 = -cu$ et $x_0 = -cv$.

Donc $(x_0, y_0) = (-cv, -cu)$ est une solution de $ndy - ax = -c$.

Les solutions de l'équation homogène $ndy - ax = 0$ sont : puisque $\text{pgcd}(a, nd) = 1$, on a $nd \mid ndx$ et $a \mid ndy$, ce qui donne $x = ndk$ et $y = ak$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Vérifions : $nd(ak) - a(ndk) = 0$. ✓

Donc les solutions générales de (E) sont :

$$\begin{cases} x = -cv + ndk = -cv + bk \\ y = -cu + ak \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Puisque $b = nd$ et $n = b/d$ (donc $cn = cb/d$) :

$$\boxed{S = \{(-vcn + bk; -ucn + ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

Attendons, reformulons avec $b = nd$, donc $nd = b$:

$$\boxed{S = \{(-cv + bk; -cu + ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

3) Résoudre (F) : $y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$

On a $a = 3$, $b = 2975$, $c = 2$, $d = 119$, avec $2975 = 119 \times 25$.

Vérifions : $a \wedge b = 3 \wedge 2975$. $2975 = 5^2 \times 7 \times 17$, donc $\text{pgcd}(3, 2975) = 1$. ✓

$c \wedge d = 2 \wedge 119 = 1$ (car $119 = 7 \times 17$). ✓

On a $d = 119$ divise $b = 2975$, avec $n = 25$, donc $b = nd = 25 \times 119$.

Il faut trouver $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $dnu - av = 1$, soit $2975u - 3v = 1$.

$$2975 = 3 \times 991 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (2975 - 3 \times 991) = 3 \times 992 - 2975$$

Donc $2975 \times (-1) - 3 \times (-992) = 1$, soit $2975 \times (-1) + 3 \times 992 = 1$.

Ajustons pour avoir des naturels : $2975(u) - 3(v) = 1$ avec $u = -1 + 3k$ et $v = -992 + 2975k$.

Pour $k = 1$: $u = 2$, $v = 1983$. Vérifions : $2975 \times 2 - 3 \times 1983 = 5950 - 5949 = 1$. ✓

Donc $u = 2$, $v = 1983$, $c = 2$, $n = 25$.

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x = -cv + bk = -2 \times 1983 + 2975k = -3966 + 2975k \\ y = -cu + ak = -2 \times 2 + 3k = -4 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(-3966 + 2975k; -4 + 3k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 5 (3.5 points) — Structures algébriques

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif, de zéro O et d'unité I .

On munit $E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4, \quad (x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$$

Partie I

1-a) Vérifier que $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$

Ici $x = 1$, $y = -1$, $x' = 3$, $y' = 2$.

$$(1 - i) * (3 + 2i) = (1 + (-1)^{-1} \times 3) + (-1 + 2)i = (1 - 3) + 1 \cdot i = -2 + i$$

$$(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i \quad \checkmark$$

1-b) La loi $*$ n'est pas commutative

Calculons $(3 + 2i) * (1 - i)$: ici $x = 3$, $y = 2$, $x' = 1$, $y' = -1$.

$$(3 + 2i) * (1 - i) = (3 + (-1)^2 \times 1) + (2 - 1)i = 4 + i$$

Or $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i \neq 4 + i = (3 + 2i) * (1 - i)$.

La loi $*$ n'est pas commutative dans E .

2) La loi $*$ est associative

Soient $a = x + yi$, $b = x' + y'i$, $c = x'' + y''i$ dans E .

Calculons $(a * b) * c$:

$$a * b = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$$

$$(a * b) * c = (x + (-1)^y x' + (-1)^{y+y'} x'') + (y + y' + y'')i$$

Calculons $a * (b * c)$:

$$b * c = (x' + (-1)^{y'} x'') + (y' + y'')i$$

$$a * (b * c) = (x + (-1)^y (x' + (-1)^{y'} x'')) + (y + y' + y'')i$$

$$= (x + (-1)^y x' + (-1)^y \cdot (-1)^{y'} x'') + (y + y' + y'')i$$

$$= (x + (-1)^y x' + (-1)^{y+y'} x'') + (y + y' + y'')i$$

Donc $(a * b) * c = a * (b * c)$.

La loi $*$ est associative dans E .

3) L'élément neutre est $0 = 0 + 0i$

Pour tout $z = x + yi \in E$:

$$z * 0 = (x + yi) * (0 + 0i) = (x + (-1)^y \cdot 0) + (y + 0)i = x + yi = z$$

$$0 * z = (0 + 0i) * (x + yi) = (0 + (-1)^0 x) + (0 + y)i = x + yi = z$$

0 est l'élément neutre pour $*$ dans E .

4-a) Vérifier que $(x + yi) * ((-1)^{y+1}x - yi) = 0$

$$(x + yi) * ((-1)^{y+1}x + (-y)i) = (x + (-1)^y \cdot (-1)^{y+1}x) + (y - y)i$$

$$\text{Or } (-1)^y \cdot (-1)^{y+1} = (-1)^{2y+1} = -1.$$

Donc :

$$= (x - x) + 0 \cdot i = 0$$

Vérifions dans l'autre sens : $((-1)^{y+1}x - yi) * (x + yi)$.

Ici le premier élément a $x_1 = (-1)^{y+1}x$ et $y_1 = -y$, et le second a $x_2 = x$, $y_2 = y$.

$$= ((-1)^{y+1}x + (-1)^{-y}x) + (-y + y)i$$

Or $(-1)^{-y} = (-1)^y$ (car $(-1)^{-y} = \frac{1}{(-1)^y} = (-1)^{-y} = (-1)^y$ puisque $(-1)^{2y} = 1$). Et $(-1)^{y+1} = -(-1)^y$.

$$\text{Donc } (-1)^{y+1}x + (-1)^y x = -(-1)^y x + (-1)^y x = 0.$$

$$(x + yi) * ((-1)^{y+1}x - yi) = 0 \text{ et réciproquement.}$$

4-b) $(E, *)$ est un groupe non commutatif

D'après ce qui précède :

- $*$ est une loi de composition interne dans E (le résultat est bien dans E).
- $*$ est associative (question 2).
- 0 est élément neutre (question 3).
- Tout élément $x + yi$ admet un symétrique $(-1)^{y+1}x - yi \in E$ (question 4-a).
- $*$ n'est pas commutative (question 1-b).

$(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II

On pose $F = \{x + 2yi \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ et :

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

1-a) F est un sous-groupe de $(E, *)$

— $F \neq \emptyset : 0 = 0 + 2 \cdot 0 \cdot i \in F$.

— **Stabilité par $*$** : Soient $a = x + 2yi$ et $b = x' + 2y'i$ dans F .

$$a * b = (x + (-1)^{2y}x') + (2y + 2y')i = (x + x') + 2(y + y')i \in F$$

car $(-1)^{2y} = 1$.

— **Stabilité par passage au symétrique** : Le symétrique de $x + 2yi$ est $(-1)^{2y+1}x - 2yi = -x + 2(-y)i \in F$.

F est un sous-groupe de $(E, *)$.

1-b) La loi $*$ est commutative dans F

Soient $a = x + 2yi$ et $b = x' + 2y'i$ dans F .

$$a * b = (x + (-1)^{2y}x') + 2(y + y')i = (x + x') + 2(y + y')i$$

$$b * a = (x' + (-1)^{2y'}x) + 2(y' + y)i = (x' + x) + 2(y + y')i$$

Donc $a * b = b * a$.

La loi $*$ est commutative dans F .

2-a) φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

$\varphi : F \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(x + 2yi) = M(x, y)$.

Soient $a = x + 2yi$ et $b = x' + 2y'i$ dans F .

$a * b = (x + x') + 2(y + y')i$, donc :

$$\varphi(a * b) = M(x + x', y + y') = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $\varphi(a) \times \varphi(b) = M(x, y) \times M(x', y')$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x + x', y + y')$$

(Le calcul donne : première ligne : $(1, x \cdot 1 + 1 \cdot x', y \cdot 1 + 1 \cdot y')$; les autres lignes sont identiques.)

Donc $\varphi(a * b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$.

φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

2-b) Montrer que $\varphi(F) = G$

— $\varphi(F) \subset G$ par définition : pour tout $x + 2yi \in F$, $\varphi(x + 2yi) = M(x, y) \in G$.

— $G \subset \varphi(F)$: pour tout $M(x, y) \in G$ (avec $x, y \in \mathbb{Z}$), l'élément $x + 2yi \in F$ vérifie $\varphi(x + 2yi) = M(x, y)$.

$\varphi(F) = G$

2-c) $(G, \times)$ est un groupe commutatif

φ est un homomorphisme surjectif de $(F, *)$ sur $(G, \times)$ (car $\varphi(F) = G$).

φ est aussi injectif : si $\varphi(x + 2yi) = \varphi(x' + 2y'i)$, alors $M(x, y) = M(x', y')$, donc $x = x'$ et $y = y'$.

Donc φ est un isomorphisme de $(F, *)$ sur $(G, \times)$.

Puisque $(F, *)$ est un groupe commutatif (sous-groupe de $(E, *)$ avec $*$ commutative dans F), l'image par un isomorphisme d'un groupe commutatif est un groupe commutatif.

$(G, \times)$ est un groupe commutatif.