

Correction — Mathématiques PC/SVT — Session de Rattrapage 2025

Exercice 1 (3 points) — Suites numériques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$.

1) a) **Vérifier que** $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$ (0.25 pt)

On part de l'expression $3 - \frac{4}{2 + u_n}$ et on simplifie :

$$\begin{aligned} 3 - \frac{4}{2 + u_n} &= \frac{3(2 + u_n) - 4}{2 + u_n} \\ &= \frac{6 + 3u_n - 4}{2 + u_n} \\ &= \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$.

1) b) **Montrer par récurrence que** $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (0.5 pt)

Initialisation : $u_0 = \frac{3}{2} = 1,5$. On a bien $0 < \frac{3}{2} < 2$.

Hérédité : Supposons que $0 < u_n < 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

— Comme $0 < u_n < 2$, on a $2 < 2 + u_n < 4$, donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{2 + u_n} < \frac{1}{2}$, puis $1 < \frac{4}{2 + u_n} < 2$.

Ainsi $3 - 2 < 3 - \frac{4}{2 + u_n} < 3 - 1$, c'est-à-dire $1 < u_{n+1} < 2$.

En particulier $0 < u_{n+1} < 2$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}$ (0.25 pt)

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} - u_n \\
 &= \frac{3u_n + 2 - u_n(2 + u_n)}{2 + u_n} \\
 &= \frac{3u_n + 2 - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} \\
 &= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{2 + u_n} \\
 &= \frac{-(u_n^2 - u_n - 2)}{2 + u_n} \\
 &= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{2 + u_n} \\
 &= \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}
 \end{aligned}$$

2) b) Montrer que (u_n) est croissante et en deduire qu'elle converge (0.5 pt)

D'après la question 1)b), on a $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc :

- $1 + u_n > 0$
- $2 - u_n > 0$
- $2 + u_n > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

(u_n) est croissante et majorée par 2, donc par le theoreme de la convergence monotone, (u_n) **converge**.

2) c) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$ (0.5 pt)

On calcule $2 - u_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 2 - u_{n+1} &= 2 - \left(3 - \frac{4}{2 + u_n}\right) \\
 &= \frac{4}{2 + u_n} - 1 \\
 &= \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + u_n} \\
 &= \frac{2 - u_n}{2 + u_n}
 \end{aligned}$$

Comme $0 < u_n < 2$, on a $2 - u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$, donc $2 - u_{n+1} > 0$.

On veut montrer que $\frac{2 - u_n}{2 + u_n} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$.

Comme $2 - u_n > 0$, on peut simplifier :

$$\frac{1}{2 + u_n} \leq \frac{2}{7}$$

Ce qui equivaut a $7 \leq 2(2 + u_n) = 4 + 2u_n$, soit $2u_n \geq 3$, c'est-a-dire $u_n \geq \frac{3}{2}$.

Montrons que $u_n \geq \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

On a $u_0 = \frac{3}{2}$ et (u_n) est croissante, donc $u_n \geq u_0 = \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $\frac{1}{2 + u_n} \leq \frac{2}{7}$, et donc :

$$0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$$

2) d) Deduire que $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$ (0.5 pt)

Par recurrence a partir de l'inegalite $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$:

Initialisation : $n = 0$: $2 - u_0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^0 = \frac{1}{2}$. Donc $0 < 2 - u_0 \leq \frac{1}{2}$. Vrai.

Heredite : Supposons $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

D'apres la question 2)c) :

$$\begin{aligned} 0 < 2 - u_{n+1} &\leq \frac{2}{7}(2 - u_n) \\ &\leq \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

2) e) Limite de (u_n) (0.5 pt)

Comme $0 < \frac{2}{7} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$.

Par le theoreme des gendarmes (avec $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$.

Exercice 2 (3 points) — Geometrie dans l'espace

On se place dans l'espace muni d'un repere orthonorme direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considere les points $A(0, 3, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$, le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$ et le plan $(P) : x - y + z - 6 = 0$.

1) a) Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n}$, en deduire que A, B, C sont non alignes (0.5 pt)

$$\vec{AB} = B - A = (1 - 0, 2 - 3, 1 - 3) = (1, -1, -2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2 - 0, 3 - 3, 1 - 3) = (2, 0, -2)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[(-1)(-2) - (-2)(0)] - \vec{j}[(1)(-2) - (-2)(2)] + \vec{k}[(1)(0) - (-1)(2)] \\ &= \vec{i}[2 - 0] - \vec{j}[-2 + 4] + \vec{k}[0 + 2] \\ &= (2, -2, 2) \\ &= 2(1, -1, 1) = 2\vec{n}\end{aligned}$$

Comme $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colineaires, donc A, B, C sont non alignes.

1) b) Montrer que le plan (ABC) et le plan (P) sont paralleles (0.25 pt)

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n} = (2, -2, 2)$.

Un vecteur normal au plan $(P) : x - y + z - 6 = 0$ est $\vec{n}_P = (1, -1, 1) = \vec{n}$.

Comme $2\vec{n} = 2\vec{n}_P$, les vecteurs normaux sont colineaires, donc les plans (ABC) et (P) sont paralleles.

Verifions que $A \notin (P) : 0 - 3 + 3 - 6 = -6 \neq 0$. Donc $A \notin (P)$ et les plans sont **strictement** paralleles.

2) Sphere (S) tangente a (ABC) en A et a (P) en H

2) a) Calculer $d(A, (P))$ et montrer que le rayon est $\sqrt{3}$ (0.5 pt)

La distance de $A(0, 3, 3)$ au plan $(P) : x - y + z - 6 = 0$ est :

$$d(A, (P)) = \frac{|0 - 3 + 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Les plans (ABC) et (P) sont paralleles et la sphere (S) est tangente aux deux plans. Le centre de la sphere est situe entre les deux plans, et la distance entre les plans est $d(A, (P)) = 2\sqrt{3}$.

Le rayon de (S) est la moitie de cette distance (car le centre est equidistant des deux plans paralleles tangents) :

$$R = \frac{d(A, (P))}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

2) b) Representation parametrique de (Δ) passant par A et perpendiculaire a (P) (0.25 pt)

La droite (Δ) passe par $A(0, 3, 3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n} = (1, -1, 1)$ (vecteur normal a (P)).

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2) c) Montrer que $H = (2, 1, 5)$ (0.5 pt)

H est l'intersection de (Δ) avec (P) . On substitue dans $(P) : x - y + z - 6 = 0$:

$$\begin{aligned} t - (3 - t) + (3 + t) - 6 &= 0 \\ t - 3 + t + 3 + t - 6 &= 0 \\ 3t - 6 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Donc $H = (2, 3 - 2, 3 + 2) = \boxed{(2, 1, 5)}$.

2) d) Equation de la sphere $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ (0.5 pt)

Le centre Ω de (S) est le milieu de $[AH]$ (car (S) est tangente a (ABC) en A et a (P) en H , et AH est perpendiculaire aux deux plans) :

$$\Omega = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (1, 2, 4)$$

Verification du rayon : $\Omega A = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Correct.
L'equation de (S) de centre $\Omega(1, 2, 4)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 &= 3 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 21 &= 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0}$$

3) Intersection de la droite (BH) avec la sphere (S) (0.5 pt)

$$\vec{BH} = H - B = (2 - 1, 1 - 2, 5 - 1) = (1, -1, 4).$$

La droite (BH) passe par $B(1, 2, 1)$ avec le vecteur directeur $(1, -1, 4)$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On substitue dans l'equation de (S) :

$$\begin{aligned}
(1+t)^2 + (2-t)^2 + (1+4t)^2 - 2(1+t) - 4(2-t) - 8(1+4t) + 18 &= 0 \\
(1+2t+t^2) + (4-4t+t^2) + (1+8t+16t^2) - 2 - 2t - 8 + 4t - 8 - 32t + 18 &= 0 \\
18t^2 + 6t + 6 - 2t - 8 + 4t - 32t - 8 + 18 - 2 &= 0 \\
18t^2 + (6-2+4-32)t + (6-2-8-8+18) &= 0 \\
18t^2 - 24t + 6 &= 0 \\
3t^2 - 4t + 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \text{ donc } t = \frac{4 \pm 2}{6}.$$

$$t_1 = 1 \text{ et } t_2 = \frac{1}{3}.$$

Pour $t_1 = 1$: $(2, 1, 5) = H$. Ce qui est normal car $H \in (S)$.

$$\text{Pour } t_2 = \frac{1}{3} : \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

La droite (BH) coupe (S) en $H(2, 1, 5)$ et en $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right)$.

Exercice 3 (3.5 points) — Nombres complexes

On pose $a = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $c = 1+a$ et $d = \bar{c}$.

1) Déterminer $|a|$ et $\arg(a)$ (0.5 pt)

$$a = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Pour l'argument : $\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.

Donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

$$\boxed{|a| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(a) = \frac{5\pi}{6}}$$

2) Montrer que $\frac{c-d}{c-a} = i$, en deduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C (0.75 pt)

On calcule c et d :

$$c = 1 + a = 1 + \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{2-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$d = \bar{c} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Calculons $c-d$:

$$c-d = \frac{2-\sqrt{3}+i}{2} - \frac{2-\sqrt{3}-i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Calculons $c-a$:

$$c-a = (1+a) - a = 1$$

Donc :

$$\frac{c-d}{c-a} = \frac{i}{1} = i$$

Interpretation géométrique :

$\left|\frac{c-d}{c-a}\right| = |i| = 1$, donc $|c-d| = |c-a|$, c'est-à-dire $CD = CA$. Le triangle ACD est **isocèle** en C.

$\arg\left(\frac{c-d}{c-a}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$, donc l'angle $(\vec{CA}, \vec{CD}) = \frac{\pi}{2}$. Le triangle ACD est **rectangle** en C.

Le triangle ACD est donc **isocèle rectangle en C**.

3) a) Montrer que $d - a = 1 - i$ et $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$ (0.5 pt)

Calcul de $d - a$:

$$\begin{aligned} d - a &= \bar{c} - a = \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2} - \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{2} \\ &= \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \end{aligned}$$

Calcul de $b - d$:

$$\begin{aligned} b - d &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} - \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2} \\ &= \frac{1 - i\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + i}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1) + i(1 - \sqrt{3})}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1) - i(\sqrt{3} - 1)}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(1 - i)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i) \end{aligned}$$

3) b) En deduire que A, D, B sont alignes (0.25 pt)

On a $d - a = 1 - i$ et $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$.

Donc $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(d - a)$.

Le rapport $\frac{b - d}{d - a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \in \mathbb{R}$.

Les vecteurs $\vec{DA}$ et $\vec{DB}$ sont colineaires, donc A, D et B sont alignes.

4) Rotation $R : z' = az$

4) a) Centre et angle de R (0.5 pt)

La rotation R est definie par $z' = az$.

Comme R est de la forme $z' = az + b$ avec $b = 0$, le centre de la rotation est le point fixe :
 $z = az \Rightarrow z(1 - a) = 0 \Rightarrow z = 0$.

Le **centre** de R est l'origine O .

L'angle de R est $\arg(a) = \frac{5\pi}{6}$.

Centre O et angle $\frac{5\pi}{6}$

4) b) Montrer que $ad = c$ et en deduire que $R(D) = C$ (0.5 pt)

$$ad = a \cdot \bar{c} = a \cdot \overline{(1+a)} = a(\bar{1} + \bar{a}) = a(1 + \bar{a}) = a + a\bar{a} = a + |a|^2 = a + 1 = c$$

Car $|a| = 1$ donc $a\bar{a} = |a|^2 = 1$.

Comme $ad = c$, l'image de d (affixe de D) par la rotation $R : z' = az$ est c (affixe de C).

Donc $\boxed{R(D) = C}$.

4) c) En deduire $\arg(c) = \frac{5\pi}{12}$ (0.5 pt)

On a $c = ad$, donc :

$$\arg(c) = \arg(a) + \arg(d)$$

Calculons $\arg(d)$. On a $d = \bar{c} = 1 - i$ (non, calculons directement).

$$d = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Autrement, on utilise $d - 0 = d = 1 - i + a = ?$ Non, utilisons plutot $d = \bar{c}$ et la relation $c = ad$.

On a $d = 1 - i$ (d'apres $d - a = 1 - i$, donc $d = a + 1 - i$). Verifions :

$$d = \bar{c} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Utilisons une methode directe. On a $c = 1 + a$ et $|a| = 1$, $\arg(a) = \frac{5\pi}{6}$.

Calculons $|c|$:

$$|c|^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

On sait que $c = ad$ et $|a| = 1$, donc $|c| = |a| \cdot |d| = |d|$. Or $d = \bar{c}$, donc $|d| = |c|$.

On a $\arg(c) = \arg(a) + \arg(d) = \arg(a) + \arg(\bar{c}) = \arg(a) - \arg(c)$.

Donc $2\arg(c) = \arg(a) = \frac{5\pi}{6}$.

$$\boxed{\arg(c) = \frac{5\pi}{12}}$$

Exercice 4 (2.5 points) — Probabilites

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise 2 boules.

- Si les 2 boules sont blanches : gain de +5.
- Si les 2 boules sont noires : gain de -5.
- Sinon : gain de 0.

On note G l'évenement « gain de +5 », Z l'évenement « gain de 0 », N_1 l'évenement « la 1ere boule est noire » et B_2 l'évenement « la 2eme boule est blanche ».

1) a) Calculer $p(G)$ (0.5 pt)

G correspond a l'évenement « 2 boules blanches ».

$$p(G) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

1) b) Montrer que $p(Z) = \frac{4}{7}$ (0.5 pt)

Z correspond a « une blanche et une noire » (dans un ordre quelconque).
Calculons d'abord $p(2 \text{ noires})$:

$$p(2 \text{ noires}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Les evenements G , Z et « 2 noires » forment un systeme complet :

$$p(Z) = 1 - p(G) - p(2 \text{ noires}) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{7-2-1}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

2) a) Calculer $p(N_1 \cap B_2)$ (0.5 pt)

$N_1 \cap B_2$: la 1ere boule est noire et la 2eme est blanche.

$$p(N_1 \cap B_2) = p(N_1) \times p(B_2|N_1) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{42} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

2) b) Montrer que $p(B_2) = \frac{4}{7}$ (0.5 pt)

On utilise la formule des probabilites totales avec le systeme (B_1, N_1) (1ere boule blanche ou noire) :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(B_1) \times p(B_2|B_1) + p(N_1) \times p(B_2|N_1) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{12}{42} + \frac{12}{42} \\ &= \frac{24}{42} = \boxed{\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

2) c) Calculer $p(Z|B_2)$ (0.5 pt)

$Z \cap B_2$: gain nul et la 2eme boule est blanche. Cela correspond a : la 1ere boule est noire et la 2eme est blanche, c'est-a-dire $N_1 \cap B_2$.

$$p(Z|B_2) = \frac{p(Z \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{p(N_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Probleme (8 points) — Etude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$ (0.5 pt)

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{e^0 + 2} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{-3 + 4}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + \frac{4}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 - 1 + \frac{4}{2 + 2} = \ln 2 - 1 + 1 = \boxed{\ln 2}$$

2) a) Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ (0.5 pt)

En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 2} = 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) + 0 = \boxed{+\infty}$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 2} = \frac{4}{0 + 2} = 2$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = \boxed{-\infty}$.

2) b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ et interpreter (0.5 pt)

$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 2} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$.

Interpretation : La droite $y = x - 1$ est **asymptote oblique** a la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}$ (0.25 pt)

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 2} \\ &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 2} + 2 - 2 \\ &= x + 1 + \frac{4}{e^x + 2} - 2 \\ &= x + 1 + \frac{4 - 2(e^x + 2)}{e^x + 2} \\ &= x + 1 + \frac{4 - 2e^x - 4}{e^x + 2} \\ &= x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2} \end{aligned}$$

3) b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2}$ et en deduire que $y = x + 1$ est asymptote en $-\infty$ (0.5 pt)

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = \frac{0}{0 + 2} = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 2} \right) = 0.$$

Donc la droite $y = x + 1$ est **asymptote oblique** a $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

3) c) Montrer que $-1 < f(x) - x < 1$ (0.5 pt)

$$\text{On a } f(x) - x = -1 + \frac{4}{e^x + 2}.$$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x + 2 > 2$, donc :

$$0 < \frac{4}{e^x + 2} < \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi :

$$-1 + 0 < -1 + \frac{4}{e^x + 2} < -1 + 2$$

$$\boxed{-1 < f(x) - x < 1}$$

Interpretation : La courbe $\mathcal{C}_f$ est comprise entre les droites $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

4) a) Montrer que $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$ (0.5 pt)

$$f(x) = x - 1 + 4(e^x + 2)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4 \cdot \frac{-e^x}{(e^x + 2)^2} \\ &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{(e^x + 2)^2 - 4e^x}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 4e^x}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2} \end{aligned}$$

4) b) En deduire que f est strictement croissante (0.25 pt)

$$e^{2x} > 0 \text{ et } 4 > 0, \text{ donc } e^{2x} + 4 > 0.$$

$$(e^x + 2)^2 > 0.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2} > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution pour tout $m \in \mathbb{R}$ (0.5 pt)

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet **une unique solution**.

5) b) Montrer que $\alpha \in]-1, 0[$ et $e^\alpha = \frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$ (0.5 pt)

$$f(0) = \frac{1}{3} > 0 \text{ et } f(-1) = -1 - 1 + \frac{4}{e^{-1} + 2} = -2 + \frac{4}{\frac{1}{e} + 2} = -2 + \frac{4e}{1 + 2e}.$$

$$\text{Calculons : } \frac{4e}{1 + 2e} \approx \frac{4 \times 2,718}{1 + 5,436} = \frac{10,872}{6,436} \approx 1,689.$$

$$\text{Donc } f(-1) \approx -2 + 1,689 = -0,311 < 0.$$

Comme $f(-1) < 0 < f(0)$ et f est continue et strictement croissante, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\alpha) = 0$ a une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$.

$f(\alpha) = 0$ signifie :

$$\begin{aligned} \alpha - 1 + \frac{4}{e^\alpha + 2} &= 0 \\ \frac{4}{e^\alpha + 2} &= 1 - \alpha \\ 4 &= (1 - \alpha)(e^\alpha + 2) \\ 4 &= e^\alpha - \alpha e^\alpha + 2 - 2\alpha \\ e^\alpha(1 - \alpha) &= 4 - 2 + 2\alpha = 2 + 2\alpha \\ e^\alpha &= \frac{2(1 + \alpha)}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

(Le dénominateur $1 - \alpha > 0$ car $\alpha < 0 < 1$.)

6) a) Montrer que $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}$ (0.5 pt)

On a $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$. Posons $u = e^{2x} + 4$ et $v = (e^x + 2)^2$.

$u' = 2e^{2x}$ et $v' = 2e^x(e^x + 2)$.

$$f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2e^{2x}(e^x + 2)^2 - (e^{2x} + 4) \cdot 2e^x(e^x + 2)}{(e^x + 2)^4}$$

On factorise par $2e^x(e^x + 2)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2e^x(e^x + 2)[e^x(e^x + 2) - (e^{2x} + 4)]}{(e^x + 2)^4} \\ &= \frac{2e^x[e^{2x} + 2e^x - e^{2x} - 4]}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{2e^x(2e^x - 4)}{(e^x + 2)^3} \\ &= \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3} \end{aligned}$$

6) b) Etude du signe de $e^x - 2$ (0.25 pt)

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

- Si $x < \ln 2$: $e^x < 2$, donc $e^x - 2 < 0$, donc $f''(x) < 0$ (f concave).
- Si $x > \ln 2$: $e^x > 2$, donc $e^x - 2 > 0$, donc $f''(x) > 0$ (f convexe).

6) c) Point d'inflexion (0.5 pt)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

f'' change de signe en $x = \ln 2$ (negative avant, positive apres).

$f(\ln 2) = \ln 2$ (calcule en question 1).

Le point d'inflexion est $\boxed{I(\ln 2, \ln 2)}$.

6) d) Equation de la tangente au point d'abscisse $\ln 2$ (0.5 pt)

$$f'(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2} + 4}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = \frac{4 + 4}{(2 + 2)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

La tangente en $(\ln 2, \ln 2)$:

$$\begin{aligned} y &= f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2) \\ &= \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \ln 2 \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \ln 2 \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{2} + \frac{\ln 2}{2}}$$

7) Representation graphique (0.75 pt)

- Asymptotes obliques : $y = x - 1$ en $+\infty$ et $y = x + 1$ en $-\infty$.
- f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Point d'inflexion : $I(\ln 2, \ln 2) \approx (0,69; 0,69)$.
- $f(0) = \frac{1}{3} \approx 0,33$.
- La courbe est concave sur $] -\infty, \ln 2[$ et convexe sur $] \ln 2, +\infty[$.
- La courbe est comprise entre les droites $y = x - 1$ et $y = x + 1$.
- La courbe approche $y = x + 1$ par en dessous quand $x \rightarrow -\infty$ (car $f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 2} < 0$).
- La courbe approche $y = x - 1$ par au-dessus quand $x \rightarrow +\infty$ (car $f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2} > 0$).

8) a) Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ (0.5 pt)

On écrit :

$$\frac{1}{e^x + 2} = \frac{1}{e^x + 2} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$$

Posons $u = 1 + 2e^{-x}$, alors $du = -2e^{-x} dx$, soit $e^{-x} dx = -\frac{du}{2}$.

Bornes : quand $x = 0$, $u = 1 + 2 = 3$; quand $x = \ln 2$, $u = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx &= \int_3^2 \frac{1}{u} \left(-\frac{du}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_3^2 \frac{du}{u} \\ &= -\frac{1}{2} [\ln u]_3^2 \\ &= -\frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 3) \\ &= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

8) b) Aire entre $\mathcal{C}_f$, la droite $y = x - 1$, $x = 0$ et $x = \ln 2$ (0.5 pt)

L'aire cherchée est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x - 1)| dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \left| \frac{4}{e^x + 2} \right| dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{4}{e^x + 2} dx \quad (\text{car la fraction est positive}) \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \\ &= 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2 \ln \frac{3}{2} \text{ u.a.}}$$