

|        |                                   |          |                                                   |
|--------|-----------------------------------|----------|---------------------------------------------------|
| الصفحة | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا |          | السلطة المغربية                                   |
| 1      | الدورة العادية 2025               |          | وزارة للتربية الوطنية                             |
| 4      | -الموضوع-                         |          | والتعليم العالي والبحث العلمي                     |
| ***    |                                   |          | المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التطلعات |
| ◆      | XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX              | NS - 22F |                                                   |

|    |             |                                                               |               |
|----|-------------|---------------------------------------------------------------|---------------|
| 3h | مدة الإجتاز | الرياضيات                                                     | المادة        |
| 7  | المعامل     | مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية) | الشعبة المسلك |

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

|            |                                                                     |            |
|------------|---------------------------------------------------------------------|------------|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace                                             | 3 points   |
| Exercice 2 | Nombres complexes                                                   | 3.5 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités                                             | 2.5 points |
| Problème   | Etude de fonctions numériques, suites numériques et calcul intégral | 11 points  |

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module.
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.
- ✓  $e$  est le nombre réel tel que  $\ln(e) = 1$ .



**Exercice 1 (3 points) :**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points

$A(0,0,2)$ ,  $B(2,0,0)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $O$  et de rayon  $R = 2$

- 0.25 1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$
- 0.5 b) Vérifier que les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la sphère  $(S)$
- 0.25 2) Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .
- 0.5 a) Déterminer l'intersection du plan  $(OAB)$  avec la sphère  $(S)$
- 0.5 b) Vérifier que  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  puis montrer que  $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$
- 0.5 3) On considère un point  $M(0, m, 0)$  de l'espace, où  $m \in \mathbb{R}$
- 0.25 a) Vérifier que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$
- 0.25 b) Dédire que  $mx + 2y + mz - 2m = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABM)$
- 0.25 c) Montrer que  $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$
- 0.5 4) Le plan  $(ABM)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma_m)$  de rayon  $r$
- 0.5 Montrer que  $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}$  et déduire que  $\sqrt{2} < r \leq 2$ , pour tout  $m \in \mathbb{R}$

**Exercice 2 (3.5 points) :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,

$B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $\Omega$  d'affixes respectives  $a = 1 + 2i$ ,  $b = \bar{a}$ ,  $c = \frac{3(3+i)}{2}$ ,  $d = \frac{3(1+i)}{2}$  et  $\omega = \frac{5}{2}$

- 0.5 1) a) Vérifier que  $a + b = 2$  et déduire que l'affixe du point  $P$ , milieu du segment  $[AB]$  est  $p = 1$
- 0.5 b) Montrer que  $a$  et  $b$  sont les solutions de l'équation :  $z^2 - 2z + 5 = 0$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$
- 0.5 2) a) Vérifier que  $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$
- 0.25 b) Dédire que  $\Omega$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$
- 0.25 3) a) Vérifier que  $\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$
- 0.5 b) Montrer que  $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$  puis déduire que les droites  $(DB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires
- 0.25 4) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $\frac{2}{3}$  et qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $h(P) = G$
- 0.25 a) Vérifier que  $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- 0.25 b) Montrer que l'affixe du point  $G$  est  $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$
- 0.5 5) Montrer que les points  $\Omega$ ,  $G$  et  $D$  sont alignés.



### Exercice 3 (2.5 points) :

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

$A$  « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

$B$  « Les deux boules tirées sont de même couleur »

0.5 1) a) Montrer que  $p(A) = \frac{2}{5}$

0.5 b) Montrer que  $p(B) = \frac{7}{15}$

0.5 c) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire  $X$  indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement  $A$ .

0.75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de  $X$

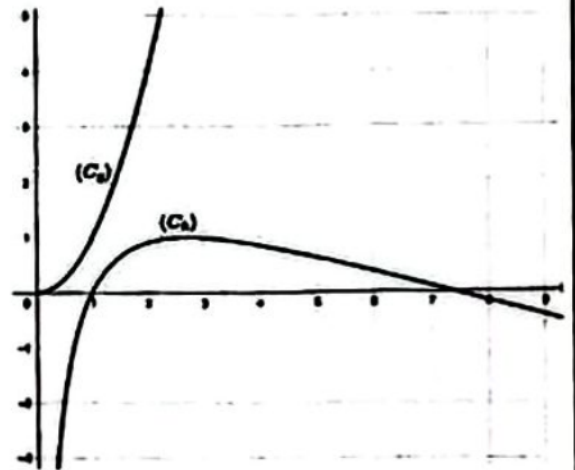
|              |                  |   |   |   |
|--------------|------------------|---|---|---|
| $X = x_i$    | 0                | 1 | 2 | 3 |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{27}{125}$ |   |   |   |

0.25 b) Calculer l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$

### Problème (11 points) :

**Partie I :** Le graphique ci-contre représente les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$  des fonctions :  $g : x \mapsto x^2$

et  $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  dans un même repère orthonormé.



0.25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :

$$g(x) - h(x) > 0$$

0.5 b) Dédire que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  :  $\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

0.5 2) a) Vérifier que la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , puis déduire que  $\int_1^e \ln(x) dx = 1 + e^2$

0.5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$

0.5 c) Résoudre sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , l'équation  $h(x) = 0$  et déduire les deux points d'intersection de la courbe  $(C_h)$  avec l'axe des abscisses.

0.5 d) Dédire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_h)$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^2$ .



**Partie II :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 0.5 1) a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  (On peut poser  $t = \sqrt{x}$ ), puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0.5 c) Dédire que la droite d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 0.75 2) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$
- 0.5 b) Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$   
(On peut utiliser la question Partie I-1-b)
- 0.5 3) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- 0.75 b) Vérifier que  $e^{-1} < \alpha < 1$  et montrer que  $\ln \alpha = -\alpha$ .
- 0.25 c) Montrer que  $f(x) \leq x$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$
- 0.5 d) Montrer que  $y = x$  est l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 1

- 4) Le graphique ci-contre représente la courbe  $(C_f)$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

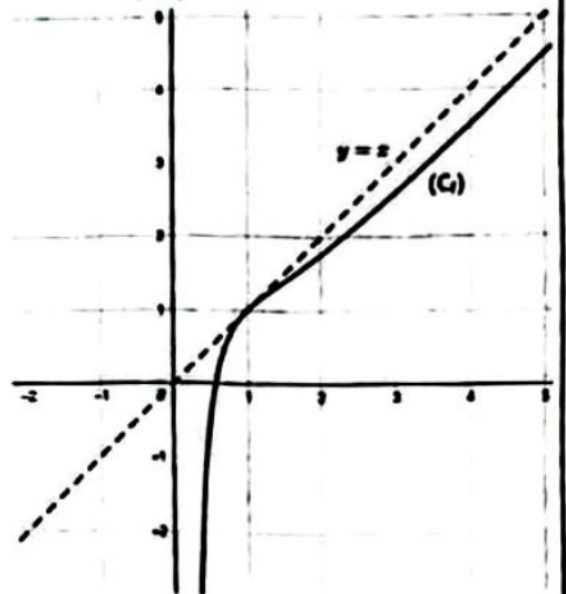
Soit  $\varphi$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]0, 1]$

- 0.5 a) Montrer que  $\varphi$  admet une fonction réciproque  $\varphi^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression  $\varphi^{-1}(x)$ )

- 0.5 b) Montrer que  $\varphi^{-1}$  est dérivable en 0 et que

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$

- 0.75 c) Recopier la courbe de  $\varphi$  et construire la courbe de  $\varphi^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie III :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = e$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 0.5 1) Montrer par récurrence que  $1 < u_n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 2) a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)
- 0.25 b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 0.5 c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

