

[illegible]

|    |                |                                                               |               |
|----|----------------|---------------------------------------------------------------|---------------|
| 3h | مدة<br>الإنجاز | الرياضيات                                                     | المادة        |
| 7  | المعامل        | مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية) | الشعبة المسلك |

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

|            |                                                                     |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace                                             | 3 points  |
| Exercice 2 | Nombres complexes                                                   | 4 points  |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités                                             | 2 points  |
| Problème   | Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques | 11 points |

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

### Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1,1,0)$  et  $\Omega(-1,1,-2)$  et le plan  $(P)$  d'équation  $x + z - 1 = 0$

- 0.5 1) a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(P)$  et donner un vecteur normal de  $(P)$ .
- 0.5 b) Montrer que la droite  $(\Omega A)$  est perpendiculaire au plan  $(P)$ .
- 2) Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$
- 0.5 a) Montrer que  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega$  et déterminer son rayon.
- 0.5 b) Montrer que  $(P)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$  puis déterminer son rayon.
- 3) Soit  $(Q_m)$  un plan d'équation  $x + y + mz - 2 = 0$ , où  $m$  est un nombre réel.
- 0.25 a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(Q_m)$ , pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$
- 0.5 b) Déterminer la valeur du réel  $m$  pour que  $(Q_m)$  soit perpendiculaire au plan  $(P)$
- 0.25 c) Existe-t-il un plan  $(Q_m)$  qui coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$  ? Justifier.

### Exercice 2 (4points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E): z^2 - 4z + 9 = 0$

- 0.25 1) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$
- 0.5 2) Résoudre l'équation  $(E)$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points

$A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2 + i\sqrt{5}$ ,  $b = 2 - i\sqrt{5}$  et  $c = 2 - \sqrt{5}$ .

- 0.25 1) a) Vérifier que  $|a| = 3$
- 0.25 b) Montrer que le triangle  $OAB$  est isocèle.
- 0.5 2) a) Vérifier que  $\frac{a-c}{b-c} = i$
- 0.5 b) Dédire la nature du triangle  $ABC$
- 0.5 3) a) Déterminer l'abscisse du point  $D$  image de  $B$  par la translation de vecteur  $\vec{CA}$
- 0.5 b) Montrer que  $ADBC$  est un carré.
- 4) On pose  $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$  et  $y_n = \frac{1}{1-x_n}$ , avec  $n$  un entier naturel non nul.
- 0.25 a) Vérifier que  $x_n \overline{x_n} = 1$
- 0.5 b) Montrer que  $y + \overline{y} = 1$  puis déduire la partie réelle de  $y$



**Exercice 3 (2points) :**

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

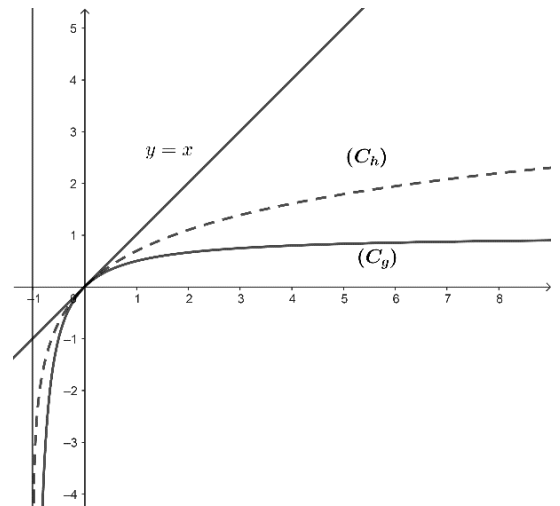
- 0.25 1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
- 0.5 2) Calculer la probabilité de l'évènement  $A$  : « Tirer trois boules blanches ».
- 0.75 3) Montrer que la probabilité de l'évènement  $B$  : « Tirer trois boules de même couleur » est  $p(B) = \frac{5}{56}$
- 0.5 4) Calculer la probabilité de l'évènement  $C$  : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

**Problème (11points) :****Partie I :**

La figure ci-contre représente les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$

des fonctions  $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$  et  $h : x \mapsto \ln(1+x)$  sur

l'intervalle  $]-1, +\infty[$  et la droite d'équation  $y = x$ , dans un même repère orthonormé.



- 0.5 1) a) A partir de cette figure, justifier que :
- $$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \text{ pour tout } x \text{ de } ]-1, +\infty[$$
- 0.25 b) En déduire que  $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$ , pour tout  $x$  de  $]-1, +\infty[$
- 0.5 c) Prouver que  $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 2) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et la relation  $u_{n+1} = g(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- 0.5 a) Montrer par récurrence que  $0 < u_n \leq 1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))
- 0.25 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 0.75 d) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

**Partie II :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ .

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



|      |                                                                                                                                                                                    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0.5  | 1) a) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$ , pour tout $x \in \mathbb{R}$                                                                                                    |
| 0.5  | b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.                                                                  |
| 0.5  | c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.                                                                |
| 0.5  | 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x)$                                                                                       |
| 0.5  | b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$                                                                                 |
| 0.5  | c) Dédire que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)                                                                 |
| 0.5  | 3) a) Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 0                                                                                         |
| 0.25 | b) Vérifier que la tangente $(T)$ passe par le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$                                                                                                |
| 0.75 | c) Construire $(T)$ et la courbe $(C_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prend $\ln 2 \approx 0,7$ )                                                                  |
| 0.5  | 4) a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$ )                 |
| 0.5  | b) Vérifier que $f^{-1}$ est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$                                                                                                   |
|      | 5) Soit $\lambda$ un réel strictement positif.                                                                                                                                     |
| 0.25 | a) Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ , pour tout $x$ de $\mathbb{R}$                                                                                        |
| 0.5  | b) Montrer que $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$                                                                                                  |
| 0.5  | c) Montrer que $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$ )                                |
| 0.5  | d) Dédire en fonction de $\lambda$ , l'aire $A_\lambda$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ |
| 0.5  | e) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$                                                                                                                         |

