



### Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0,1,1)$ ,  $B(1,2,0)$  et  $C(-1,1,2)$

- 0,5 1) a) Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$
- 0,25 b) En déduire que  $x + z - 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
- 0,5 2) Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega(1,1,2)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$   
Déterminer une équation de la sphère  $(S)$
- 0,5 3) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$  au point  $A$
- 4) On considère la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $C$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$
- 0,25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$
- 0,5 b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  en un point  $D$  dont on déterminera les coordonnées
- 0,5 c) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$ , puis en déduire la distance  $d(A, (\Delta))$

### Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe  $a = -1 - i\sqrt{3}$ , le point  $B$  d'affixe  $b = -1 + i\sqrt{3}$  et la translation  $t$  de vecteur  $\overrightarrow{OA}$

- 0,5 1) Prouver que l'affixe du point  $D$  image du point  $B$  par la translation  $t$  est  $d = -2$
- 2) On considère la rotation  $R$  de centre  $D$  et d'angle  $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .
- 0,5 Montrer que l'affixe du point  $C$  image du point  $B$  par la rotation  $R$  est  $c = -4$
- 0,5 3) a) Ecrire le nombre  $\frac{b-c}{a-c}$  sous forme trigonométrique
- 0,5 b) En déduire que  $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$
- 4) Soient  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $D$  et de rayon 2,  $(\Gamma')$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 4 et  $M$  un point d'affixe  $z$  appartenant aux deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$
- 0,25 a) Vérifier que  $|z + 2| = 2$
- 0,5 b) Prouver que  $z + \bar{z} = -8$  (remarquer que  $|z| = 4$ )
- 0,25 c) En déduire que les cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  se coupent en un point unique qu'on déterminera



### Exercice 3 (3points) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

- 0,75 1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{6}$  ; où  $A$  est l'évènement " N'obtenir aucune boule rouge "
- 0,75 2) Calculer  $p(B)$  ; où  $B$  est l'évènement " Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes "
- 0,75 3) Montrer que  $p(C) = \frac{1}{2}$  ; où  $C$  est l'évènement " Obtenir exactement une boule rouge "
- 0,75 4) Calculer  $p(D)$  ; où  $D$  est l'évènement " Obtenir au moins deux boules rouges "

### Exercice 4 (2.5points) :

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (x+1)e^x$

- 0,75 1) a) Vérifier que  $x \mapsto xe^x$  est une primitive de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  ; puis calculer  $I = \int_{-1}^0 h(x) dx$
- 0,75 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer  $J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$
- 0,5 2) a) Résoudre l'équation différentielle  $(E): y'' - 2y' + y = 0$
- 0,5 b) Montrer que la fonction  $h$  est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions  $h(0) = 1$  et  $h'(0) = 2$

### Problème (8.5points) :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ .

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

- 0,5 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 0,5 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter géométriquement le résultat
- 0,5 3) a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$
- 0,75 b) Etudier le signe de  $(f(x) - x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et en déduire la position relative de la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$
- 0,5 4) a) Montrer que  $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 0,5 b) Vérifier que  $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis en déduire le signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $\mathbb{R}$
- 0,25 c) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$



0,5

5) a) Montrer que  $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ ; où

$g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

0,5

b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction  $g$ ,  
déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  (Remarque :  $g(\alpha) = 0$ )

0,5

c) Etudier la concavité de la courbe  $(C)$  et déterminer les  
abscisses des deux points d'inflexions.

1

6) Construire la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
(On prend :  $\ln(4) \approx 1,4$ ,  $\alpha \approx -4,5$  et  $f(\alpha) \approx -3,5$ )

0,5

7) a) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction  
réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$

0,25

b) Calculer  $(f^{-1})'(\ln 4)$

8) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

0,5

a) Montrer par récurrence que  $0 < u_n < \ln 4$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

0,5

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

0,25

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

0,5

d) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

