

EXERCICE1 : (10 points)

0.25 A-1- Montrer que : $(x \mapsto 1 + x e^x)$;

0.25 2-a) Montrer que : $(x \mapsto 1 - e^{-x} x)$;

0.5 b) En déduire que : $(x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \frac{x^3}{6})$;

0.5 c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (x \mapsto]0, +\infty[) ; \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $(x > 0) ; \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\frac{3}{2}$

0.5 2-a) Montrer que : $(x > 0) ; \quad f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x (1 + x))$

0.5 b) Montrer que : $(x > 0) ; \quad f'(x) \leq -e^{-2x}$
(On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$)

0.25 c) En déduire le sens de variations de f sur I

3- On admet que : $(x > 0) ; \quad f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x (2 + 2x + x^2))$

0.25 a) Montrer que : $(x > 0) ; \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 b) En déduire que : $(x > 0) ; \quad f''(x) > 0$

4- On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

0.5 a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

0.5 b) En déduire que : $(x \in I) ; \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$



- 0.5 5-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 b) Dresser le tableau de variations de f
- 0.25 c) Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0;1)$
- 0.5 d) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$

C-1- Pour tout x de $[0;1]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$

- 0.5 a) Montrer que g est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- 0.5 b) Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0;1[$ tel que $f(a) = a$

2- Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0;1,\dots,n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \frac{ka}{n}$ et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$$

- 0.5 a) Montrer que : " $k \in \{0;1,\dots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$ "
- 0.5 b) En déduire que : " $k \in \{0;1,\dots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3a^2}{4n^2}$ "

3- On pose : $L = \int_0^a f(t) dt$

- 0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3a^2}{4n}$
- 0.25 b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right) = \int_0^a f(t) dt$

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;0;1\}$

I- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m): \quad mz^2 - (m-1)^2z - (m-1)^2 = 0$$

- 0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $D = (m^2 - 1)^2$
- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)



0.5

2) On prend uniquement dans cette question $m = e^{iq}$, avec $0 < q < p$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\frac{1}{m}-1$

0.5

1- Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$;

2- On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{p}{3}$ et D l'image du

point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{p}{3}$

et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$

0.5

a) Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1 + \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}}$

et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{p}{3}}$

0.5

b) Montrer que : $2(p-r) = m-1 + \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - \frac{1}{m}$

$$\text{et } 2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{p}{3}} - \frac{1}{m}e^{i\frac{p}{3}} - m\frac{1}{m}$$

0.25

c) Montrer que : $q-r = e^{i\frac{p}{3}}(p-r)$

0.5

d) Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

EXERCICE3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi $\cdot$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et soit $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$



1- Soit j l'application de i vers $M_3(i)$ définie par : $(a \hat{i} i) ; j(a) = M(a)$

- 0.5 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(i, +)$ vers $(M_3(i), ')$
- 0.5 b) Montrer que $j(i) = G$, en déduire que $(G, ')$ est un groupe commutatif.
- 0.5 c) Déterminer J l'élément neutre dans $(G, ')$
- 0.5 d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, ')$
- 0.5 e) Résoudre dans $(G, ')$ l'équation : $M(1)' X = M(2)$

0.25 2-a) Montrer que : $(a \hat{i} i) ; M(a)' J = M(a)' I$

0.5 b) En déduire que pour tout $a \hat{i} i$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(i), ')$

0.25 c) Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \hat{i} i$, sont

des solutions dans $(M_3(i), ')$ de l'équation : $M(1)' X = M(2)$

EXERCICE4 (3 points)

- 0.5 1- Montrer que 137 est un nombre premier.
- 0.5 2- Déterminer un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$
- 3- Soit $x \hat{i} \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.
- 0.5 b) Montrer que : $x^{136} \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 c) Montrer que : $x^2 \equiv 1 \pmod{137}$
- 0.5 4- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^{19} \equiv 1 \pmod{137}$

FIN

