

## Bac Sciences Mathématiques National 2018

### EXERCICE 1 : (3,5 points )

On rappelle que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif et que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire , de zéro la matrice nulle  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité la matrice

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble  $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

0,25

1- Montrer que  $E$  est un sous-groupe du groupe  $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0,25

2- a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,5

b) On pose  $J = M(0, 1)$ . Montrer que  $(I, J)$  est une base de l'espace vectoriel réel  $(E, +, \cdot)$

0,5

3- a) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

0,5

b) Montrer que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif .

4- Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{C}^*$  vers  $M_2(\mathbb{R})$  définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \quad ; \quad \varphi(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$$

0,5

a) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  vers  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

0,5

b) On pose  $E^* = E - \{O\}$ . Montrer que  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0,25

c) En déduire que  $(E^*, \times)$  est un groupe commutatif .

0,25

5- Montrer que  $(E, +, \times)$  est un groupe commutatif.

### EXERCICE 2 : (3 points )

Soit  $p$  un nombre premier tel que :  $p = 3 + 4k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

0,5

1- Montrer que pour tout entier relatif  $x$ , si  $x^2 \equiv 1[p]$  alors  $x^{p-5} \equiv 1[p]$

2- Soit  $x$  un entier relatif vérifiant :  $x^{p-5} \equiv 1[p]$

0,5

a) Montrer que  $x$  et  $p$  sont premiers entre eux .

0,5

b) Montrer que :  $x^{p-1} \equiv 1[p]$ .



- |     |                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------|
| 0,5 | c) Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$                      |
| 0,5 | d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$                            |
| 0,5 | 3- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$ |

### EXERCICE 3 : (3,5 points )

- |                                                                                                             |                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Soit $m$ un nombre complexe .                                                                               |                                                                                                                                       |
| I- On considère dans l'ensemble complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m)$ d'inconnue $z$ :                  |                                                                                                                                       |
| $z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$                                                                          |                                                                                                                                       |
| 0,25                                                                                                        | 1- a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation $(E_m)$                                                   |
| 0,5                                                                                                         | b) Donner, suivant les valeurs de $m$ , l'ensemble des solutions de l'équation $(E_m)$                                                |
| 0,5                                                                                                         | 2- Pour $m = i\sqrt{2}$ , écrire les deux racines de l'équation $(E_m)$ sous la forme exponentielle.                                  |
| II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$                     |                                                                                                                                       |
| On considère les points $A$ , $\Omega$ , $M$ et $M'$ d'affixes respectifs $a = -1 - i$ , $\omega = i$ , $m$ |                                                                                                                                       |
| et $m' = -im - 1 + i$                                                                                       |                                                                                                                                       |
| 1- Soit $R$ la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme $M$ en $M'$                                 |                                                                                                                                       |
| 0,25                                                                                                        | a) Vérifier que $\Omega$ est le centre de $R$                                                                                         |
| 0,5                                                                                                         | b) Déterminer l'affixe $b$ de $B$ , où $B$ est le point tel que : $A = R(B)$                                                          |
| 0,5                                                                                                         | 2- a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$                                                                  |
| 0,5                                                                                                         | b) En déduire que les points $A$ , $M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si les points $A$ , $B, \Omega$ et $M$ sont cocycliques . |
| 0,5                                                                                                         | c) Montrer que l'ensemble des points $M$ tel que les points $A$ , $M$ et $M'$ soient alignés                                          |
| Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .                                                   |                                                                                                                                       |

### EXERCICE 4 : (7,5 points )

- |                                                                                                               |                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Partie I :</b>                                                                                             |                                                                                               |
| 0,5                                                                                                           | 1- a) Montrer que : $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$ |
| 0,5                                                                                                           | b) En utilisant le changement de variable $u = t^2$ , montrer que :                           |
| $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$ |                                                                                               |



|                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0,5                                                                                                                                                       | c) En déduire que : $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$                                 |
| 0,25                                                                                                                                                      | 2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$                                                                                    |
| <b>Partie II :</b>                                                                                                                                        |                                                                                                                                                      |
| On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ |                                                                                                                                                      |
| et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$                                                                  |                                                                                                                                                      |
| 0,25                                                                                                                                                      | 1- a) Montrer que $f$ est continue à droite en 0                                                                                                     |
|                                                                                                                                                           | b) Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0                                                                                                       |
| 0,5                                                                                                                                                       | ( On pourra utiliser le résultat de la question I.2)                                                                                                 |
| 0,75                                                                                                                                                      | c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. |
| 0,5                                                                                                                                                       | 2- a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ , puis vérifier que :                                                                         |
|                                                                                                                                                           | $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$                                                                                    |
| 0,25                                                                                                                                                      | b) En déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$                                                                                  |
| 0,25                                                                                                                                                      | c) Vérifier que : $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$                                                                                                   |
| 0,5                                                                                                                                                       | 3- Représenter graphiquement la courbe $(C)$                                                                                                         |
|                                                                                                                                                           | ( On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 )                                                                                    |
| <b>Partie III :</b>                                                                                                                                       |                                                                                                                                                      |
| 0,5                                                                                                                                                       | 1- On considère la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$                                                                   |
|                                                                                                                                                           | a) Montrer que : $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$                                                                         |
| 0,5                                                                                                                                                       | b) En déduire que $g$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puis montrer que                                                               |
| 0,25                                                                                                                                                      | $g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1[$                                                                                                                     |
| 0,25                                                                                                                                                      | c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0, +\infty[$                                                           |
| 0,25                                                                                                                                                      | 2- Soit $a$ un réel de l'intervalle $]0, +\infty[$ .                                                                                                 |
|                                                                                                                                                           | On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$                          |
|                                                                                                                                                           | a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$                                                                                              |



|      |                                                                                                                                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0,5  | b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad  u_{n+1} - \alpha  \leq \frac{1}{2}  u_n - \alpha $                         |
| 0,5  | c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad  u_n - \alpha  \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n  a - \alpha $ |
| 0,25 | d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$                                                           |

### EXERCICE 5 : ( 2,5 points )

|     |                                                                                                                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$                                      |
| 0,5 | 1- Montrer que $F$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$                                                    |
| 0,5 | 2- a) Montrer que : $(\forall x \in ]0, +\infty[) \quad ; \quad F(x) \geq x$ . En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ |
| 0,5 | b) Montrer que $F$ est impaire , en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$                                               |
| 0,5 | c) Montrer que $F$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$                                                        |
| 0,5 | d) Montrer que la bijection réciproque $G$ de la fonction $F$ est dérivable en $0$ , puis calculer $G'(0)$                    |

