★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques …(3.5 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique…….....(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes ….(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse……....(7 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

MonBac.ma
Preparation au Baccalaureat marocain
Annales officielles, examens blancs, corrections detaillees et IA educative pour comprendre tes erreurs, progresser et etre pret le jour du Bac.
Voir la correction ->
Scanne ce QR

EXERCICE 1: (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et $E=\{M(x,y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0.5 2-Vérifier que :

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall (x',y')\in\mathbb{R}^2)\ :\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

3- On pose : $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.75 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$.

0.5 4- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5- On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

0.5 b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

EXERCICE 2: (3points)

Première partie : Soit (a,b) dans $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise a^3+b^3

0.25 1- Montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times 57$)

0.25 2- Montrer que : 173 **divise** a si et seulement si 173 **divise** b

0.25 3- **On suppose que** 173 **divise** a .Montrer que 173 divise $a+b$

4- **On suppose que** 173 **ne divise pas** a .

0.5 a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0.5 b) Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0.5 c) En déduire que 173 divise $a+b$

Deuxième partie : On considère dans $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ l'équation suivante :

$$(E)\quad x^3+y^3=173(xy+1)$$

MonBac.ma
Preparation au Baccalaureat marocain
Annales officielles, examens blancs, corrections detaillees et IA educative pour comprendre tes erreurs, progresser et etre pret le jour du Bac.
Voir la correction ->
Scanne ce QR

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ solution de (E) , on pose : $x+y=173k$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

0.25 1- Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

0.5 2- Montrer que $k=1$ puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE 3: (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O , M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0.5 1- a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

0.5 b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0.5 2- Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3- On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$

0.5 a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0.5 b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4- Soit θ un réel **donné** de l'intervalle $]0,\pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$

0.5 a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

0.5 b) Donner en fonction de θ ,la forme trigonométrique du nombre complexe z .

EXERCICE 4 : (7points)

Première partie :

0.5 1- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x , il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $e^{\theta}=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$

2- En déduire que :

0.25 a) $(\forall x>0)$; $1-x<e^{-x}$

0.25 b) $(\forall x>0)$; $x+1<e^{x}$

0.25 c) $(\forall x>0)$; $0<\ln\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

MonBac.ma
Preparation au Baccalaureat marocain
Annales officielles, examens blancs, corrections detaillees et IA educative pour comprendre tes erreurs, progresser et etre pret le jour du Bac.
Voir la correction ->
Scanne ce QR

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1} \text{ si } x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=1$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1- a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0 .

0.5 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall x\geq 0) \quad x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

0.5 b) En déduire que : $(\forall x\geq 0) \quad \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}$

0.5 3-a) Vérifier que : $(\forall x>0) \quad \frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$

0.75 b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0.75 4-a) Montrer que f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0) \quad f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

Troisième partie :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0>0$ et $u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$

0.5 a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n>0$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0.5 c) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(x)\right)=x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

EXERCICE 5 :(3 points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$$

0.5 1-a) Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I .

MonBac.ma
Preparation au Baccalaureat marocain
Annales officielles, examens blancs, corrections detaillees et IA educative pour comprendre tes erreurs, progresser et etre pret le jour du Bac.
Voir la correction ->
Scanne ce QR

0.25 c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

2-a) En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour

0.5 tout x de I on a : $\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

0.25 3-a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F .

FIN

MonBac.ma
Preparation au Baccalaureat marocain
Annales officielles, examens blancs, corrections detaillees et IA educative pour comprendre tes erreurs, progresser et etre pret le jour du Bac.
Voir la correction ->
Scanne ce QR